20 Green 函数方法

在 "δ 函数" 一章中, 我们已经初步接触过 Green 函数, 讨论了常微分方程的 Green 函数方法.
本章将讨论偏微分方程的 Green 函数方法.

Green 第二公式

$$\iiint_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma [u\nabla v - v\nabla u]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \quad (1)$$

其中 Σ 是体积 V 的边界面, 并且规定边界面的外法线方向为正. 这一公式可简称为 Green 公式.

20.1 Green 函数基本概念

以静电场为例. 先考虑有界空间. 设金属壳表面接地, 金属壳内有一定的电荷分布, 电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$, 则静电势满足 Possion 方程, 定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \\ u|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

静电势满足电势叠加原理, 设

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = -\frac{\rho_1(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \\ u_1|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u_2 = -\frac{\rho_2(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \\ u_2|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

则它们的线性组合满足

$$\begin{cases} \nabla^2(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = -\frac{\alpha_1\rho_1(\boldsymbol{r})+\alpha_2\rho_2(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \\ (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

利用 δ 函数, 任意电荷密度分布都可以表示为 δ 函数的线性组合

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \int \rho(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$\delta(\boldsymbol{r})$ 为三维空间的 δ 函数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

对于每一个 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 电荷分布, 求出

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\epsilon_0} \\ G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

G 即 Green 函数. 而线性叠加

$$u(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

即定解问题的解.

$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 电荷分布为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \end{cases}$$

且

$$\int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1$$

代表在 $\boldsymbol{r}'$ 处有一个单位点电荷, 所以, 这里的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 即 $\boldsymbol{r}'$ 处的单位点电荷在 $\boldsymbol{r}$ 产生的电势.

Example 20.1 无界空间

$$\begin{cases}\nabla^2 u=-\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0}\\ u|_{r\to\infty}=0\end{cases}$$

定义 *Green* 函数

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\epsilon_0}\\ G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')|_{r\to\infty}=0\end{cases}$$

Solution 实际上, 点电荷在无界空间产生的静电势为

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

容易验证它确实是满足上面方程的Green函数, 因为

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}).$$

所以

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

这都是我们熟知的结果, 现在用 Green 函数来解释. □

以上通过静电场的实例引人了 Poisson 方程在第一类边界条件下(简称 Poisson 方程的第一边值问题)的 Green 函数. 一般地

Green 函数
不含时间的稳定问题的 Green 函数定义为一个特殊的定解问题的解:

- 方程和原来定解问题的方程一样, 只是非齐次项改为 δ 函数 (点源);
- 同种类型的齐次边界条件.

Note 在某些特殊情形下, 这样定义的 *Green* 函数可能无解.

在求解 Green 函数时, Green 函数满足的方程是非齐次的, 但非齐次项是 δ 函数, 除了 δ 函数的宗量为零的个别点外, 方程是齐次的! 这会简化 Green 函数的求解. 另一方面, δ 函数不是传统意义下的函数, Green 函数的求解又具有其独特性.

利用 Green 函数可求出任意分布的源在相应边界条件下所产生的场.

Example 20.2 *Poisson* 方程是

$$\nabla^2 u=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{2}$$

第一、二、三类边界条件可以统一地写为

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_\Sigma=f \tag{3}$$

其中 α 和 β 是不同时为零的实数, f 是体积 V 的边界 Σ 上的给定函数.

Solution 相应的 Green 函数的定解问题为

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4}$$

$$\left[\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right]_\Sigma = 0 \tag{5}$$

以 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 乘 (2) 式, $u(\boldsymbol{r})$ 乘 (4) 式, 相减, 然后在体积 V 中求积分, 得

$$\iiint_V [G\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G]\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V G\rho\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

左边的积分应用 Green 公式化为面积分, 移项, 得

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \epsilon_0\iint_\Sigma \left(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n} - u(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma \tag{7}$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 代表沿 Σ 的外法线的方向导数.

对于第一类边值问题

$$\alpha = 0; \qquad \beta = 1$$

$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在边界上为零, 所以

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \epsilon_0\iint_\Sigma f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma \tag{8}$$

若 $\alpha\neq 0$, 以 G 乘 (3), 得

$$\left[\alpha G\frac{\partial u}{\partial n}+\beta G u\right]_\Sigma = Gf$$

以 u 乘 (5), 得

$$\left[\alpha u\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G u\right]_\Sigma = 0$$

两式相减, 得

$$\alpha\left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right]_\Sigma = Gf$$

代入 (7) 式, 得

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{\epsilon_0}{\alpha}\iint_\Sigma G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\Sigma \tag{9}$$

□

Note 注意，对于第二边值问题，$\alpha=1,\beta=0$，*Poisson* 方程的 *Green* 函数并不存在！

由 *Green* 公式

$$\iiint_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$$
$$= \iint_\Sigma \frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma = 0$$

可是，将 *Poisson* 方程积分，又得到

$$\iiint_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{1}{\epsilon_0}$$

20.2 稳定问题 Green 函数的一般性质

Green 函数的对称性

我们来考察解式 (7) 的物理意义. Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 代表的是位于 $\boldsymbol{r}'$ 点的点源在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场, (7) 式右方的第一个积分中 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是在 $\boldsymbol{r}$ 点的源, 这使得解释这个积分的意义时发生了困难. 下面我们将证明上述 Green 函数具有对称性

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})$$

因此, 在把 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 对调后, 可得

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \epsilon_0 \iint_\Sigma \left(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n} - u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma' \quad (10)$$

这个式子的物理意义很清楚: 右边第一个积分代表在体积 V 中的分布源 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场的总和; 第二个积分则是在边界面上的源所产生的场.

我们来考虑更一般的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + \lambda u = -f \quad (11)$$

Poisson 方程是它的一个特例 ($\lambda = 0$). 相应的 Green 函数满足方程

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad (12)$$

仍设边界条件为

$$\left[\alpha\frac{\partial G}{\partial n} + \beta G\right]_\Sigma = 0 \quad (13)$$

α 和 β 不同时为零. 我们来证明 Green 函数具有对称性

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) \quad (14)$$

由方程, 有

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \lambda G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') + \lambda G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')$$

以 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$ 乘第一式, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 乘第二式, 相减, 然后求积分, 得

$$\begin{aligned}
&\iiint_V [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
=& -\iiint_V [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
=& -[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')]
\end{aligned}$$

把左方的体积分变为面积分, 得

$$
\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')\\
&=\iint_\Sigma\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}\right]_\Sigma \mathrm{d}\Sigma
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Σ 是 V 的边界面. 根据边界条件, 在 Σ 面上有

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}+\beta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0\\
\alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}+\beta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')=0
\end{aligned}
$$

但 α 和 β 不同时为零, 故必须

$$
\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}\right]_\Sigma=0
$$

这就证明了对称性.

Green 函数的对称性有很重要的物理意义, 即位于 $\boldsymbol{r}'$ 点的点源, 在一定的边界条件下在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场, 等于位于 $\boldsymbol{r}$ 点的同样强度的点源, 在相同的边界条件下在 $\boldsymbol{r}'$ 点产生的场.

Note 这样的对称性并非所有的 *Green* 函数都具有.

Green 函数在点源附近的行为

不妨仍然用静电场的语言来描述 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数. 在空间 V 中的点电荷, 必然要在边界面上产生一定的感生(面)电荷分布. 因此, 决定 Green 函数的定解问题又可以等价(在 V 内等价)地写成无界空间中满足 Poisson 方程

$$
\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\epsilon_0}\big[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')+\sigma(\Sigma)\delta_\Sigma\big],
\tag{16}
$$

其中 $\sigma(\Sigma)$ 是边界面 Σ 上的感生面电荷密度, δ_Σ 代表某种 δ 函数(例如边界面为球面时就是 $\delta(r-a)$). 相应地, (定义在 V 内的) Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 就应该是这两部分电荷电势的叠加: 单位点电荷 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的电势 $G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和边界面上的感生电荷 $\sigma(\Sigma)$ 的电势 $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$,

$$
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'),
\tag{17}
$$

$$
\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),
\tag{18}
$$

$$
\nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\Sigma)\delta_\Sigma.
\tag{19}
$$

点电荷产生的电势

$$
G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},
\tag{20}
$$

所以 $G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点不连续. 因为感生电荷 $\sigma(\Sigma)$ 只分布在曲面 Σ 上, 所以 $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 及其一阶偏导数在曲面 Σ 外 (特别是, 在V内) 处处连续.

对于第三类边界条件, 也有同样的结果. 只不过 $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 的具体表达式会得有所不同.

对于其他类型的稳定问题, 也可以类似地讨论. 例如, Helmholtz 方程的 Green 函数, 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点附近, 有

$$
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\sim\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.
$$

以上讨论的是三维空间中 Green 函数在点源处的行为. 值得注意, 它和一维空间中 Green 函数的行为不同. 一维空间中的 Green 函数是处处连续的, 而它的一阶导数不连续. 原因是空间的维数不同, “点源”的性质也不相同. 可以预期, 二维空间中的 Green 函数也应该具有不同的行为.

对于二维空间中 Poisson 方程第一边值问题, 它的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$ 是定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]G(x,y;x',y')=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(x-x')\delta(y-y'),\quad (x,y),(x',y')\in S, \tag{21a}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_C=0 \tag{21b}$$

的解, 其中 C 是平面区域 S 的边界. 模仿上面三维情形的讨论, 可以得出, 这时的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$ 应当是

$$G(x,y;x',y')=-\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+g(x,y;x',y'), \tag{22}$$

其中第一项是单位点电荷在无界空间中的电势(还可以加上一个常数, 取决于电势零点的选取), 在“点源”(等价于三维空间中的线源) $\delta(x-x')\delta(y-y')$ 处是对数发散的; 第二项 $g(x,y;x',y')$ 是边界上的感生电荷产生的电势, 在 S 内处处连续.

20.3 三维无界空间 Helmholtz 方程的格林函数

Example 20.3 *求三维无界空间中亥姆霍兹方程的格林函数, 即在三维无界空间中求解*

$$\nabla^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{23}$$

无穷远处的边界条件暂缺，后面再讨论．

Solution 由于是在无界空间, 可以适当地安置坐标架, 使问题得到简化. 如果作坐标平移, 将点电荷所在点 $\boldsymbol{r}'$ 取为新坐标系的原点, 即在新坐标系 $\boldsymbol{r}'=0$. 则

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';0)=g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$g(\boldsymbol{r})$ 满足方程

$$\nabla^2g(\boldsymbol{r})+k^2g(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}) \tag{24}$$

转换为球坐标系, 注意到

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi r^2}\delta(r)$$

则方程变为 $g(\boldsymbol{r})=f(r)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right]+k^2f(r)=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0r^2}\delta(r) \tag{25}$$

$r\neq0$ 时, 方程可化为零阶球贝塞耳方程, 它的通解是

$$f(r)=A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}+B\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}. \tag{26}$$

$r=0$, 我们已经约定, 凡是涉及 δ 函数的等式都应该从积分意义下去理解. 于是, 很自然地, 应当将方程在 $r=0$ 附近的小体积内对 $4\pi r^2\mathrm{d}r$ 积分.

$$4\pi\left[r^2\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right]_0^\rho+4\pi k^2\int_0^\rho f(r)r^2\mathrm{d}r=-\frac{1}{\epsilon_0}. \tag{27}$$

ρ为小体积球体的半径. 第一项应理解!

$$\left[r^2\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right]_{r=0}=0$$

于是

$$\begin{aligned}4\pi\left[r^2\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right]_0^\rho&=4\pi\left[r^2\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right]_{r=\rho}\\&=-4\pi A(1-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-4\pi B(1+\mathrm{i}k\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho}.\end{aligned}$$

第二项的积分可以直接算出,

$$4\pi A\Big[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-1)-\mathrm{i}k\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\Big]+4\pi B\Big[(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho}-1)+\mathrm{i}k\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho}\Big]$$

将这些结果代回, 就有

$$4\pi(A+B)=\frac{1}{\epsilon_0},$$

最后, 应由无穷远处的边界条件定出常数 A 和 B. 考虑到亥姆霍兹方程的实际背景, 它是由波动方程经过分离变量(分离去时间部分)得到的. 作为一个例子, 假设要求得到的解在无穷远处为发散波. 取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 则应保留解的第一项(即 $A\neq 0$), 而弃去第二项(即令 $B=0$). 所以

$$A(k)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

这样就求出了三维无界空间亥姆霍兹方程的格林函数

$$g(\boldsymbol{r})=f(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},\tag{28}$$

或

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.\tag{29}$$

当$k=0$时, 这个结果就回到泊松方程的格林函数.

如果要求无穷远处为会聚波(且仍取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$), 则格林函数是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.\tag{30}$$

如果是其他形式的无穷远条件, 当然还会得到其他形式的解. □

另解 下面介绍另一种解法. 考虑到这是无界空间中的定解问题, 可采用傅里叶变换. 令

$$g(\boldsymbol{k};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r},\tag{31}$$

则方程 Fourior 变换后, 变为

$$\big[-k'^2+k^2\big]g(\boldsymbol{k}';\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\epsilon_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'},\tag{32}$$

所以,

$$g(\boldsymbol{k}';\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{k'^2-k^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'},\tag{33}$$

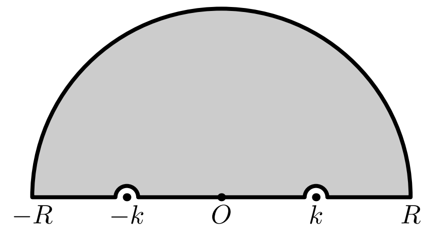
其中$k'^2 = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}' = |\boldsymbol{k}'|^2$. 再求反演, 就有

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\epsilon_0}\int\frac{1}{k'^2-k^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'. \tag{34}$$

可以看出, $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 只是$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的函数. 不妨令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$, 然后改用 $\boldsymbol{k}'$ 空间中的球坐标计算上面的积分, 就得到

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\epsilon_0}\iiint\frac{k'^2}{k'^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'R\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}k'\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\epsilon_0}\int_0^\infty\frac{k'}{k'^2-k^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}K'R}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'R}\right]\mathrm{d}k' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\epsilon_0}\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^\infty\frac{k'}{k'^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'R}\mathrm{d}k'. \end{aligned}$$

应用留数定理容易计算出这个定积分. 考虑到在实轴上有两个奇点, $k'=\pm k$, 故可以采用下图的围道. 这样, 当半径趋于0时, 沿奇点 $k'=\pm k$ 处半圆弧的积分值为



$$-\pi\mathrm{i}\lim_{k'\to\pm k}(k'\mp k)\frac{k'}{k'^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'R} = -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kR},$$

所以, 现在求得的三维无界空间亥姆霍兹方程的格林函数是

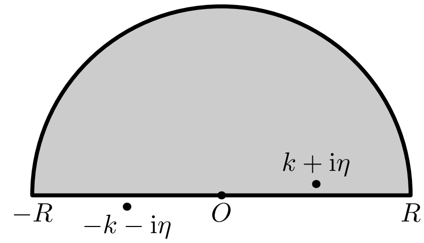
$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\epsilon_0}\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos(kR)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \end{aligned} \tag{35}$$

将上式与前面用第一种方法得到的结果作比较, 大家立刻发现: 两种方法得出的结果竟然不同! 造成这一矛盾的原因是, 两种方法实际上是使用了不同的无穷远条件. 在第一种方法中, 明确地限定了无穷远处为发散波. 在第二种方法中, 乍一看来, 似乎并没有使用无穷远条件. 但在作 Fourior 逆变换时, 积分取主值要求就相当于取了特定的无穷远条件.

如果限定无穷远处为发散波, 就要采用特殊的技巧, 即将 $g(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}')$ 中的常数 k 添上一个虚部, 变成 $k+\mathrm{i}\eta$ (约定$\eta>0$), 在求出了格林函数后再令 $\eta\to 0$.

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\epsilon_0}\lim_{\eta\to+0}\int_{-\infty}^\infty\frac{k'}{k'^2-(k+\mathrm{i}\eta)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'R}\mathrm{d}k'. \tag{36}$$

再应用留数定理计算这个积分. 因实轴上没有奇点, 故采用下图的围道，就能得到



$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\epsilon_0}\lim_{\eta\to+0}\left[\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+\mathrm{i}\eta)R}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

得到的格林函数和前一方法结果完全相同．这就是说, 只要把 $g(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}')$ 中的k改为$k+\mathrm{i}\eta$, 而在求出解式后再取极限 $\eta\to+0$, 得到的格林函数就满足无穷远处为发散波的要求. 这种做法的根据是, 在无穷远处为发散波的要求下, 解的渐近形式必然具有相位因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}$, 这样, 如果将 k 改为 $k+\mathrm{i}\eta$, 则上面的相位因子就变为$\mathrm{e}^{-\eta R+\mathrm{i}kR}$, 积分

$$
\int |G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')|\mathrm{d}\boldsymbol{r}
$$

绝对收敛! 这样才满足 Fourior 变换的条件. □

作为练习, 同学们可以把 $g(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}')$ 中的 k 改为 $k-\mathrm{i}\eta$, 重复上面的求解步骤, 就可以发现, 得到的格林函数就对应于无穷远处为会聚波.

20.4 圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数

Example 20.4 圆内 *Poisson* 方程第一边值问题

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \\
u\big|_{r=a} = f(\phi)
\end{cases}
$$

相应 *Green* 函数的定义是

$$
\begin{cases}
\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\epsilon_0} \\
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = 0
\end{cases}
$$

采用平面极坐标系 $\boldsymbol{r}(r,\theta)$, 还需加上边界条件:

$$
\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')|_{r=0}\text{有界} \\
&G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')|_{\phi=0} = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')|_{\phi=2\pi} \\
&\frac{\partial}{\partial\phi}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\bigg|_{\phi=0} = \frac{\partial}{\partial\phi}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\bigg|_{\phi=2\pi}
\end{aligned}
$$

Solution 方程为非齐次方程, 先将方程齐次化. 注意到在二维平面上

$$
\nabla^2 \ln r = 2\pi\delta(\boldsymbol{r})
$$

即

$$
v(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|
$$

是方程的解.

$$
\nabla^2 v(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\epsilon_0}
$$

令

$$
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = v(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')
$$

则 w 满足齐次方程

$$
\begin{cases}
\nabla^2 w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = 0 \\
w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = -v(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|_{r=a}
\end{cases}
$$

分离变量...

极坐标系下 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = R(r)\Phi(\phi)$ ...
求特解...
本征函数Φ选为

$$\Phi_0 = 1 \qquad\qquad \begin{aligned}\Phi_{m1} &= \cos m\phi \\ \Phi_{m2} &= \sin m\phi\end{aligned}$$

叠加出一般解

$$w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [C_{m1} r^m \cos m\phi + C_{m2} r^m \sin m\phi]$$

代入边界条件, 定系数.
利用展开式

$$\begin{aligned}\ln[1+t^2-2t\cos\phi] &= \ln[1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}] + \ln[1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}] \\ &= -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}t^m\cos m\phi \end{aligned} \tag{38}$$

可得

$$\begin{aligned}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= \frac{1}{2}\ln[r^2+r'^2-2rr'\cos(\phi-\phi')] \\ &= \frac{1}{2}\ln[r_>^2+r_<^2-2r_>r_<\cos(\phi-\phi')] \\ &= \ln r_> - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^m\cos m(\phi-\phi')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \ln r_> &- \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^m\cos m\phi\cos m\phi' \\ &- \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^m\sin m\phi\sin m\phi'\end{aligned} \tag{39}$$

当 $r=a$ 时

$$\begin{aligned}& w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|_{r=a} \\ =&\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln a - \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{a}\right)^m\cos m\phi\cos m\phi' \\ &- \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{a}\right)^m\sin m\phi\sin m\phi' \\ =&C_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[C_{m1}a^m\cos m\phi + C_{m2}a^m\sin m\phi]\end{aligned}$$

比较得

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln a \\ C_{m1} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{a^2}\right)^m\cos m\phi' \\ C_{m2} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{m}\left(\frac{r'}{a^2}\right)^m\sin m\phi'\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
& w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') \\
=& \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln a - \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m\cos m(\phi-\phi') \\
=& \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left\{\ln a + \frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^2 - 2\frac{rr'}{a^2}\cos(\phi-\phi')\right]\right\} \\
=& \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 + r^2 - 2r\frac{a^2}{r'}\cos(\phi-\phi')\right] - \ln\frac{a}{r'}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
w(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln\left|\boldsymbol{r}-\left(\frac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'\right| - \ln\frac{a}{r'}\right]
$$

所以 Green 函数为

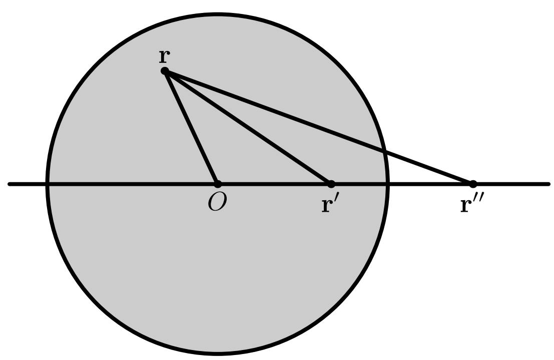
$$
\begin{aligned}
& G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') \\
=& -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - \ln\left|\boldsymbol{r}\left(\frac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'\right| + \ln\frac{a}{r'}\right]
\end{aligned}
$$

第一项是 $\boldsymbol{r}'$ 处点电荷产生的电势, 第二项相当于在圆外

$$
\boldsymbol{r}'' = \left(\frac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'
$$

处的点电荷产生的电势. $\square$

电像法



大家知道, 一旦在接地圆中放上点电荷后, 在圆周上必然出现感生电荷. 圆内任意一点的电势, 就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加. 前者已经满足 Possion 方程, 但不满足边界条件. 而后者在圆内满足 Laplace 方程. 合在一起才是整个圆内泊松方程第一边值问题的格林函数.

注意到圆外点电荷产生的电势满足圆内的 Laplace 方程. 如果能将边界上的感生电荷用一个或几个圆外点电荷代替, 产生相同的圆内电势分布. 则求感生电荷电势转化为求一个或几个圆外点电荷的位置和电荷数. 这样, 可以简化 Green 函数的求解. 在电动力学中, 称为**电像法**. 当然, 电像法并不是一个普遍的方法, 只在少数情况下, 才能成功.

对于上述圆内 Poisson 方程问题, 考虑仅在圆外放一个像电荷. 根据对称性的考虑, 我们还可以进一步断定, 如果这个等价电荷存在的话, 它还一定位于真实电荷所处的半径的延长线上. 设这个等价电荷的位置为$\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\, y_1)$, 电量为 e, 于是, 它和真实点电荷一起, 在圆内的电势就是

$$
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| + e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| + C\Big], \tag{40}
$$

其中常数 C 与电势零点的选择有关. 现在的问题就是要从要求圆周 $r=a$ 上的电势为0,

$$-\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big]_{r=a}=0, \tag{41}$$

求出 $\boldsymbol{r}_1$, e 和 C. 如果采用平面极坐标

$$\begin{array}{rclrclrcl} x &=& r\cos\phi, & x' &=& r'\cos\phi', & x_1 &=& r_1\cos\phi', \\ y &=& r\sin\phi, & y' &=& r'\sin\phi', & y_1 &=& r_1\sin\phi', \end{array}$$

则方程化为

$$\begin{aligned} &\ln\left[a^2+{r'}^2-2ar'\cos(\phi-\phi')\right] \\ &\qquad\qquad +e\ln\Big[a^2+r_1^2-2ar_1\cos(\phi-\phi')\Big]+2C=0, \end{aligned} \tag{42}$$

它应该对一切 ϕ 均成立. 注意当 $|t|<1$ 时有展开式

$$\begin{aligned} &\ln\left[1+t^2-2t\cos\phi\right]=\ln\left[1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right]+\ln\left[1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\right] \\ &\qquad\qquad =-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}t^m\cos m\phi, \end{aligned} \tag{43}$$

于是就可以将方程化为

$$\begin{aligned} &2\ln a+\ln\left[1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos(\phi-\phi')\right]+2e\ln r_1 \\ &+e\ln\left[1+\left(\frac{a}{r_1}\right)^2-2\frac{a}{r_1}\cos(\phi-\phi')\right]+2C \\ &=2\ln a+2e\ln r_1+2C \\ &-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Big[\Big(\frac{r'}{a}\Big)^m+e\Big(\frac{a}{r_1}\Big)^m\Big]\cos m(\phi-\phi')=0, \end{aligned}$$

这样就得到

$$\ln a+e\ln r_1+C=0 \tag{44}$$

和

$$\Big(\frac{r'}{a}\Big)^m+e\Big(\frac{a}{r_1}\Big)^m=0,\quad m=1,2,3,\cdots, \tag{45}$$

将上式化成

$$e=-\Big(\frac{r_1r'}{a^2}\Big)^m,\quad m=1,2,3,\cdots,$$

所以, 就可以得到

$$e=-1$$

和

$$r_1=\frac{a^2}{r'}\quad \text{或}\quad \boldsymbol{r}_1=\Big(\frac{a}{r'}\Big)^2\boldsymbol{r}'.$$

这样, 我们的确求出了这个等价电荷, 它位于真实电荷所在半径的延长线上, 并且满足

$$r'r_1=a^2.$$

由 e 和 r_1 的结果, 又可以求得

$$C=-\ln a+\ln r_1=\ln\frac{a}{r'}.$$

将 e, r_1 和 C 的结果代回, 就求得圆内 Poisson方程第一边值问题的 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \\ -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - \ln\Big|\boldsymbol{r}-\Big(\frac{a}{r'}\Big)^2\boldsymbol{r}'\Big| + \ln\frac{a}{r'}\Big], \quad (46)$$

或者在极坐标系中的表达式,

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\ln\Big[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi-\phi')\Big] \\ - \ln\Big[r^2 + \Big(\frac{a^2}{r'}\Big)^2 - 2r\frac{a^2}{r'}\cos(\phi-\phi')\Big] + 2\ln\frac{a}{r'}\Big\}. \quad (47)$$

求出圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Greeen 函数后, 就可以导出一般的定解问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}), \quad |\boldsymbol{r}| < a \quad (48a)$$

$$u(\boldsymbol{r})\big|_{r=a} = f(\phi) \quad (48b)$$

的解. 先将方程的自变量改写成 $\boldsymbol{r'}$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}'), \quad |\boldsymbol{r}| < a \quad (49a)$$

$$u(\boldsymbol{r}')\big|_{r'=a} = f(\phi') \quad (49b)$$

$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 满足的定解问题为

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad |\boldsymbol{r}| < a, |\boldsymbol{r}'| < a$$
$$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\big|_{r'=a} = 0$$

再利用 Green 函数的对称性

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})$$

将 Green 函数满足的方程改写成

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad |\boldsymbol{r}| < a, |\boldsymbol{r}'| < a \quad (50a)$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r'=a} = 0 \quad (50b)$$

将方程 (49a) 和 (50a) 分别乘以 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和 $u(\boldsymbol{r}')$, 然后相减, 再在圆内积分, 得

$$\begin{aligned}&\iint_{r'<a}\rho(\boldsymbol{r'})G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r'})\mathrm{d}\boldsymbol{r'} - u(\boldsymbol{r}) \\ =& -\epsilon_0\iint_{r'<a}\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r}') - u(\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r'})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r'} \\ =& -\epsilon_0\iint_{r'<a}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{r}') - u(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r'})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\end{aligned}$$

可利用 Gauss 定理化为沿圆周 $r = a$ 的线积分, 并利用边界条件, 就有

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r}) = & \iint_{r'<a} \rho(\boldsymbol{r'}) G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r'}) \mathrm{d}\boldsymbol{r'} \\
& + \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \left[G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r'}) \frac{\partial u(\boldsymbol{r'})}{\partial r'} - u(\boldsymbol{r'}) \frac{\partial G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r'})}{\partial r'} \right]_{r'=a} a \mathrm{d}\phi' \\
= & \iint_{r'<a} \rho(\boldsymbol{r'}) G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r'}) \mathrm{d}\boldsymbol{r'} \\
& - \epsilon_0 \int_0^{2\pi} f(\phi') \left. \frac{\partial G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r'})}{\partial r'} \right|_{r'=a} a \mathrm{d}\phi'
\end{aligned} \tag{51}
$$

代入 $G(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r'})$ 的表达式, 得

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r}) = & -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \iint_{r'<a} \rho(\boldsymbol{r'}) \Bigg[\ln |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}| \\
& \qquad - \ln \left| \boldsymbol{r} - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \boldsymbol{r'} \right| + \ln \frac{a}{r'} \Bigg] \mathrm{d}\boldsymbol{r'} \\
& + \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')} \mathrm{d}\phi'.
\end{aligned} \tag{52}
$$

当 $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$, 就有圆内 Laplace 方程第一边值问题的 Poisson 公式

$$
u(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')} \mathrm{d}\phi'. \tag{53}
$$

20.5 波动方程的 Green 函数

现在再用 Green 函数方法研究与时间有关的定解问题. 以有界弦的波动问题为例, 最一般的定解问题就是 $(0 < x < l,\ t > 0)$

Example 20.5

$$
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{54a}
$$

$$
u(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t), \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \nu(t), \tag{54b}
$$

$$
u(x,t)\big|_{t=0} = \phi(x), \qquad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \tag{54c}
$$

相应的 Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 是瞬时(仅存在于某一时刻)的点源(仅存在于空间某点)问题

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G(x,t;\, x',t') = \delta(x - x')\delta(t - t'),
$$

$$
0 < x, x' < l,\ t, t' > 0 \tag{55a}
$$

加齐次定解条件

$$
G(x,t;x',t')\big|_{x=0} = 0, \qquad G(x,t;x',t')\big|_{x=l} = 0, \tag{55b}
$$

$$
G(x,t;x',t')\big|_{t<t'} = 0, \qquad \left. \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} \right|_{t<t'} = 0. \tag{55c}
$$

这里初始条件的物理意义是很清楚的: 驱动力是在 $t = t'$ 时刻出现的, 在此以前, 弦一直保持静止.

和稳定问题的 Green 函数问题一样, 我们分别讨论下列三个问题.

$G(x,t;x',t')$ 的对称性

为此, 再列出关于 Green 函数 $G(x,-t;x'',-t'')$ 的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,-t;x'',-t'')=\delta(x-x'')\delta(t-t''), \tag{56a}$$

$$G(x,-t;x'',-t'')\big|_{x=0}=0, \qquad G(x,-t;x'',-t'')\big|_{x=l}=0, \tag{56b}$$

$$G(x,-t;x'',-t'')\big|_{-t<-t''}=0, \ \frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t}\bigg|_{-t<-t''}=0 \tag{56c}$$

将方程 (55a) 和 (56a) 分别乘以 Green 函数 $G(x,-t;x'',-t'')$ 和 $G(x,t;x',t')$, 然后相减, 再在区间 $[0,l]$ 和 $[0,\infty)$ 上对 x 和 t 积分. 因为

$$\begin{aligned}&G(x',-t';x'',-t'')-G(x'',t'';x',t')\\ =&\int_0^l \mathrm{d}x\int_0^\infty\left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial t^2}\right.\\ &\qquad\left.-G(x,t;x',t')\frac{\partial^2 G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\infty \mathrm{d}t\int_0^l\left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2}\right.\\ &\qquad\left.-G(x,t;x',t')\frac{\partial^2 G(x,-t;x'',-t'')}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&G(x',-t';x'',-t'')-G(x'',t'';x',t')\\ =&\int_0^l\left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t}\right.\\ &\qquad\left.-G(x,t;x',t')\frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t}\right]_0^\infty\mathrm{d}x\\ &-\int_0^\infty\left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x}\right.\\ &\qquad\left.-G(x,t;x',t')\frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial x}\right]_0^l\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

代入边界条件 (55b), (56b) 和初始条件 (55c), (56c), 可以看出, 右端的积分为0. 所以, 这样就导出了*Green 函数在空间上的对称性与时间上的倒易性*

$$G(x'',t'';x',t')=G(x',-t';x'',-t''),$$

或者将 x'' 和 t'' 改写成 x 和 t,

$$G(x,t;x',t')=G(x',-t';x,-t). \tag{57}$$

在此式中, 将 t 和 t' 易位时出现的负号, 正好保证了时间的先后次序不变, 否则就会违反因果律.

由 Green 函数求定解问题的解

为了用 Green 函数及已知条件表示定解问题 (54) 的解, 先将该定解问题中的自变量改写为 x' 和 t',

$$\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = f(x',t'), \tag{58a}$$

$$u(x',t')\big|_{x'=0} = \mu(t'), \qquad u(x',t')\big|_{x'=l} = \nu(t'), \tag{58b}$$

$$u(x',t')\big|_{t'=0} = \phi(x'), \qquad \frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\Big|_{t'=0} = \psi(x'). \tag{58c}$$

再写出 $G(x',-t';x,-t)$ 满足的定解问题, 并利用 Green 函数的对称性与倒易性关系改写为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right] G(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t'), \tag{59a}$$

$$G(x,t;x',t')\big|_{x'=0} = 0, \qquad G(x,t;x',t')\big|_{x'=l} = 0, \tag{59b}$$

$$G(x,t;x',t')\big|_{t'>t} = 0, \qquad \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}\Big|_{t'>t} = 0. \tag{59c}$$

将方程 (58a) 和 (59a) 分别乘以 $G(x,t;x',t')$ 和 $u(x',t')$, 然后相减, 再积分,

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t') f(x',t') \mathrm{d}t' - u(x,t) \\
=& \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty \left[G(x,t;x',t') \frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} \right. \\
&\qquad \left. - u(x',t') \frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial t'^2} \right] \mathrm{d}t' \\
& - a^2 \int_0^\infty \mathrm{d}t' \int_0^l \left[G(x,t;x',t') \frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} \right. \\
&\qquad \left. - u(x',t') \frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x'^2} \right] \mathrm{d}x'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^\infty G(x,t;x',t') f(x',t') \mathrm{d}t' - u(x,t) \\
=& \int_0^l \left[G(x,t;x',t') \frac{\partial u(x',t')}{\partial t'} \right. \\
&\qquad \left. - u(x',t') \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} \right]_0^\infty \mathrm{d}x' \\
& - a^2 \int_0^\infty \left[G(x,t;x',t') \frac{\partial u(x',t')}{\partial x'} \right. \\
&\qquad \left. - u(x',t') \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'} \right]_0^l \mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

代入边界条件 (58b), (59b) 和初始条件 (58c), (59c), 可以将上面的结果化简为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^t G(x,t;x',t') f(x',t') \mathrm{d}t' \\
& + \int_0^l \left[G(x,t;x',0)\psi(x') \right. \\
& \qquad \left. -\phi(x') \left. \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'} \right|_{t'=0} \right] \mathrm{d}x' \\
& - a^2 \int_0^t \left[\nu(t') \left. \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'} \right|_{x'=l} \right. \\
& \qquad \left. - \mu(t') \left. \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'} \right|_{x'=0} \right] \mathrm{d}t'.
\end{aligned} \tag{60}
$$

求解 Green 函数

现在讨论如何由定解问题 (55) 求出 Green 函数.

解法一 因为这是非齐次方程的定解问题, 第一种解法仍然是按相应齐次问题的本征函数展开.

$$G(x,t;x',t') = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{61}$$

同时, 将 δ函数也按该组本征函数展开,

$$\delta(x-x') = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x' \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{62}$$

于是, $T_n(t)$ 就满足常微分方程的初值问题

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x' \, \delta(t-t'), \tag{63a}$$

$$T_n(t<t') = 0, \qquad T_n'(t<t') = 0. \tag{63b}$$

解之即得

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi a} \sin \frac{n\pi}{l} x' \, \sin \frac{n\pi}{l} a(t-t') \, \eta(t-t'). \tag{64}$$

所以, $G(x,t;x',t')$ 就是

$$
\begin{aligned}
& G(x,t;x',t') \\
& \qquad = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x' \, \sin \frac{n\pi}{l} x \, \sin \frac{n\pi}{l} a(t-t') \, \eta(t-t').
\end{aligned} \tag{65}
$$

□

解法二 第二种方法是将定解问题作 Laplace 变换. 令

$$g(x,p;x',t') = \int_0^{\infty} G(x,t;x',t') \, \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t, \tag{66}$$

则 $g(x,p;x',t')$ 满足常微分方程的边值问题

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{p}{a} \right)^2 \right] g(x,p;x',t') = -\frac{1}{a^2} \mathrm{e}^{-pt'} \, \delta(x-x'), \tag{67a}$$

$$g(x,p;x',t') \big|_{x=0} = 0, \qquad g(x,p;x',t') \big|_{x=l} = 0. \tag{67b}$$

由此也可求得

$$g(x,p;x',t') = \begin{cases} \dfrac{\sinh\dfrac{p}{a}(l-x')\,\sinh\dfrac{p}{a}x}{pa\,\sinh\dfrac{p}{a}l}\mathrm{e}^{-pt'}, & x<x', \\ \dfrac{\sinh\dfrac{p}{a}x'\,\sinh\dfrac{p}{a}(l-x)}{pa\,\sinh\dfrac{p}{a}l}\mathrm{e}^{-pt'}, & x'<x \end{cases} \tag{68}$$

最后, 求反演,

$$G(x,t;x',t') = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L g(x,p;x',t')\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p,$$

应用留数定理算出这个积分, 也可以得到相同的结果. □

Example 20.6 *再讨论一个三维空间的例子. 这时的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 满足定解问题 $(t,t'>0)$*

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2\right]G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'), \tag{69a}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{t<t'} = 0, \qquad \left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t}\right|_{t<t'} = 0. \tag{69b}$$

Solution 作 Fourier 变换

$$g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{70}$$

于是就将定解问题化为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + (ka)^2\right]g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\delta(t-t'), \tag{71a}$$

$$g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{t<t'} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t<t'} = 0. \tag{71b}$$

可以得到

$$g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{\sin ka(t-t')}{ka}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\eta(t-t'). \tag{72}$$

作逆变换, 就有

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{\eta(t-t')}{(2\pi)^3}\iiint \frac{\sin ka(t-t')}{ka}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

在 $\boldsymbol{k}$ 空间的球坐标系中计算上面的积分, 就得到

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{2\pi^2 a}\frac{\eta(t-t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty \sin ka(t-t')\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k. \tag{73}$$

这个积分在通常的意义下是不存在的. 出现这种积分的原因, 是由于定解问题中的非齐次项也不是通常意义下的函数. 为了算出这个积分, 可以利用积分变换恒等式

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x')\sin kx'\mathrm{d}x'\right]\sin kx\mathrm{d}k \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x')\left[\int_0^\infty \sin kx'\sin kx\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

这说明 $(x, x' > 0)$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin kx' \sin kx \mathrm{d}k = \delta(x - x')$$

把这个结果代入, 就求出了 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') = \frac{1}{4\pi a}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| - a(t - t')). \qquad (74)$$

这里去掉了函数 $\eta(t - t')$, 因为 δ 函数已经保证了 $t - t' < 0$ 时 $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') = 0$. 这个解式的物理意义明确: t' 时刻在 $\boldsymbol{r}'$ 处发射的信号, t 时刻一定只到达距 $\boldsymbol{r}'$ 点为 $a(t - t')$ 的球面上.

利用这个 Green 函数, 当然就可以得到三维无界空间中波动方程的初值问题

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t), \qquad t > 0, \qquad (75a)$$

$$u(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{t=0} = \phi(\boldsymbol{r}), \qquad \frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}) \qquad (75b)$$

的解,

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| < at}\frac{f(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|/a)}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \frac{1}{4\pi a}\left[\iint_\Sigma \frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Sigma' + \frac{\partial}{\partial t}\iint_\Sigma \frac{\phi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Sigma'\right], \qquad (76)$$

其中 Σ 是以 $\boldsymbol{r}$ 点为球心、at 为半径的球面$|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = at$. □

20.6 热传导方程的 Green 函数

对于热传导问题的 Green 函数, 可以仿照波动问题的做法. 例如, 对于三维有界空间中的热传导问题 $\boldsymbol{r} \in V$, $t > 0$,

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t), \qquad (77a)$$

$$u(\boldsymbol{r}, t)\Big|_\Sigma = \mu(\Sigma, t), \qquad (77b)$$

$$u(\boldsymbol{r}, t)\Big|_{t=0} = \phi(\boldsymbol{r}), \qquad (77c)$$

相应的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')$ 就可以定义为 t' 时刻在 $\boldsymbol{r}'$ 处有一个(单位强度的)瞬时点热源所产生的温度分布. 换句话说, 就是定解问题

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\nabla^2\right]G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\delta(t - t'), \qquad (78a)$$

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')\Big|_\Sigma = 0, \qquad (78b)$$

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')\Big|_{t=0} = 0, \qquad (78c)$$

的解. 由平移不变性, 容易理解, 初始条件也可以写成 $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')\Big|_{t<t'} = 0$.

仿照波动问题的做法, 也可以证明 Green 函数同样具有空间对称性和时间倒易性,

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') = G(\boldsymbol{r}', -t'; \boldsymbol{r}, -t). \qquad (79)$$

为了应用 Green 函数方法解定解问题, 也可以模仿上一节的做法: 首先将定解问题的自变量改写成 $\boldsymbol{r}'$ 和 t',

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'} - \kappa {\nabla'}^2 u(\boldsymbol{r}',t') = f(\boldsymbol{r}',t'), \tag{80a}$$

$$u(\boldsymbol{r}',t')\big|_{\Sigma'} = \mu(\Sigma',t'), \tag{80b}$$

$$u(\boldsymbol{r}',t')\big|_{t'=0} = \phi(\boldsymbol{r}'). \tag{80c}$$

然后写出格林函数 $G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)$ 满足的定解问题,

$$\left[\frac{\partial}{\partial(-t')} - \kappa {\nabla'}^2\right] G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta(t-t'), \tag{81}$$

$$G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)\big|_{\Sigma'} = 0, \tag{82}$$

$$G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)\big|_{-t'<-t} = 0. \tag{83}$$

进一步再利用格林函数对于空间的对称性和时间的倒易性关系, 改写成

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t'} - \kappa {\nabla'}^2\right] G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta(t-t'), \tag{84a}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{\Sigma'} = 0, \tag{84b}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{t'>t} = 0. \tag{84c}$$

将方程分别乘以 G, 相减, 并积分, 就得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}t' \iiint_V f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - u(\boldsymbol{r},t)\\
=&\iiint_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \int_0^\infty \left[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\right.\\
&\qquad\left. + u(\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\right]\mathrm{d}t'\\
&-\kappa \int_0^\infty \mathrm{d}t' \iiint_V \left[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'){\nabla'}^2 u(\boldsymbol{r}',t')\right.\\
&\qquad\left. - u(\boldsymbol{r}',t'){\nabla'}^2 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}t' \iiint_V f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - u(\boldsymbol{r},t)\\
=&\iiint_V G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')u(\boldsymbol{r}',t')\Big|_{t'=0}^{t'=\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\
&-\kappa \int_0^\infty \mathrm{d}t' \iint_\Sigma \left[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\nabla' u(\boldsymbol{r}',t')\right.\\
&\qquad\left. - u(\boldsymbol{r}',t')\nabla' G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}',
\end{aligned}$$

代入边界条件和初始条件, 最后就得到

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t) = &\int_0^t \mathrm{d}t' \iiint_V f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &+ \iiint_V \phi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &- \kappa\int_0^t \mathrm{d}t' \iint_\Sigma \mu(\Sigma',t')\ \frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial n'}\bigg|_{\Sigma'} \mathrm{d}\Sigma'.\end{aligned} \tag{85}$$

Example 20.7 求解一维无界空间热传导方程的 *Green* 函数

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] G(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t'),$$

$$t' > 0,$$

$$G(x,t;x',t')\big|_{x\to\pm\infty} \text{有界},$$
$$G(x,t;x',t')\big|_{t=0} = 0.$$

Solution 作 Laplace 变换, 令

$$g(x,p;x',t') = \int_0^\infty G(x,t;x',t')\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

定解问题化为

$$pg(x,p;x',t') - \kappa\frac{\mathrm{d}^2 g(x,p;x',t')}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-x')\mathrm{e}^{-pt'},$$
$$g(x,p;x',t')\big|_{x\to\pm\infty} \text{有界}.$$

求解此一维 Green 函数问题, 得

$$g(x,p;x',t') = \frac{1}{2\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'} exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|\right\}.$$

利用

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}.$$

反演, 得

$$\begin{aligned}G(x,t;x',t') =&\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}}\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')}\right\} \\ &\times \eta(t-t').\end{aligned}$$

□

20.7 广义 Green 函数

前面已指出, Green 函数

$$\nabla^2 G = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_\Sigma = 0$$

不存在. 这个结论很容易从这个定解问题在热传导问题中的物理意义看出. 方程代表一个稳定的温度场, 场中 $\boldsymbol{r}'$ 点有一个点热源, 而边界条件则表示边界是绝热的. 但这样的温度场不可能是稳定的, 因为从点源出来的热量既然不能通过(绝热的)边界散走, 势必会使物体内部的温度不断升高. 对于第一和第三类边界条件, 这种情况不会发生, 因为这时, 物体与外界都有热量的交换, 是可以达到稳定状态的.

下面从更为普遍的角度来讨论 Green 函数存在的必要条件. 仍考虑 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + \lambda u = -f \tag{86}$$

在齐次的第一、二、三类边界条件

$$\left[\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]_\Sigma = 0 \tag{87}$$

之下的定解问题.

若 u_0 为齐次如下齐次方程定解问题的非零解

$$\nabla^2 u_0 + \lambda u_0 = 0 \tag{88}$$

$$\left[\alpha \frac{\partial u_0}{\partial n} + \beta u_0\right]_\Sigma = 0 \tag{89}$$

即 λ 是算符 $-\nabla^2$ 的本征值, u_0 是相应的本征函数. 以 u_0 乘 (86), u 乘 (88), 相减, 然后求积分, 得

$$\iiint_V [u_0 \nabla^2 u - u \nabla^2 u_0] \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \left[u_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_0}{\partial n}\right] \mathrm{d}\Sigma = -\iiint_V f u_0 \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

由边界条件 (87) 和 (89) 有 (因 α 和 β 不同时为零)

$$\left[u_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_0}{\partial n}\right]_\Sigma = 0$$

因此得

$$\iiint_V f u_0 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{90}$$

这就是在 λ 为本征值时, 非齐次方程 (86) 有解的必要条件: **非齐次项 f 必须与本征函数 u_0 正交**.

现在回过来讨论 Green 函数的问题. 方程和边界条件是

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{91}$$

$$\left[\alpha \frac{\partial G}{\partial n} + \beta G\right]_\Sigma = 0 \tag{92}$$

如果 λ 是本征值, 相应的本征函数是 $u_0(r)$, 则

$$\iiint_V u_0(\boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\boldsymbol{r} = u_0(\boldsymbol{r}') \neq 0$$

因此, 在这种情形下, Green 函数不存在!

在 λ 是本征值的情形下, 可以引入所谓 “广义 Green 函数”. 令 G 满足方程

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') + c u_0(r)$$

边界条件不变, 仍为 (92). 要求

$$\iiint_V u_0(r) [-\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') + c u_0(\boldsymbol{r})] \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

即

$$c = \frac{\iiint_V u_0(r)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\iiint_V [u_0(\boldsymbol{r})]^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \frac{u_0(\boldsymbol{r}')}{\iiint_V [u_0(\boldsymbol{r})]^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}} \tag{93}$$

如果 $u_0(r)$ 是归一的,

$$\iiint_V [u_0(\boldsymbol{r})]^2\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1$$

则 $c = u_0(\boldsymbol{r}')$, 而 G 所满足的方程为

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + u_0(\boldsymbol{r}')u_0(\boldsymbol{r}) \tag{94}$$

但满足方程 (94) 和边界条件 (92) 的解不是唯一的, 可以任意加上相应齐次方程的解 $A(\boldsymbol{r}')u_0(\boldsymbol{r})$. 因此, 通常还要求 G 与 $u_0(\boldsymbol{r})$ 正交:

$$\iiint_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')u_0(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{95}$$

这样, G 就是唯一的了.

由 (94), (92) 和 (95) 确定的函数 G 称为*广义 Green 函数*. 利用广义 Green 函数, 可以如前得到普遍边值问题

$$\nabla^2 u + \lambda u = -f \tag{96}$$

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]_\Sigma = g \tag{97}$$

的解, 其中 λ 是本征值.