17 柱函数

Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

在柱坐标系 (r, θ, z) 中为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{2}$$

分离变量

$$u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

后, 可得三方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left(k^2 - \lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \mu\Theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} + \lambda Z = 0 \tag{5}$$

μ, λ 为常数.

对于径向方程, 如果 $k^2 - \lambda \neq 0$. 作变换

$$x = \sqrt{k^2 - \lambda}\, r$$
$$y(x) = R(r)$$

并令 $\mu = \nu^2$, 方程变为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \tag{6}$$

称为 ν 阶 Bessel 方程.

在“二阶线性常微分方程的幂级数解法”一章, 我们求解过方程:

1. $\nu \neq$整数时, Bessel 方程的两个正则解都不含对数项

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k \pm \nu + 1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} \tag{7}$$

   为 $\pm\nu$ 阶 Bessel 函数.

2. $\nu =$整数, 第一解 $J_n(x)$ 仍为 Bessel 函数, 这时

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

   第二解一定含有对数项, 为 Neumann 函数, 以后讨论.

17.1 Bessel 函数的基本性质

整数阶 Bessel 函数的性质.

1. 负整数阶 Bessel 函数

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{8}$$

2. 奇偶性

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \tag{9}$$

3. 生成函数 在幂级数展开一章, 我们得到

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \tag{10}$$

此即整数阶 Bessel 函数的生成函数.

4. 生成函数中令 $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11}$$

于是

$$\begin{aligned}J_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)^*\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(x\sin\theta-n\theta)\\&\qquad+\mathrm{i}\sin(x\sin\theta-n\theta)]\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{12}$$

为 $J_n(x)$ 的积分表示.

5. 生成函数中令 $t=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\\&=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}^nJ_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{i}^{-n}J_{-n}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right]\\&=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}^nJ_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{i}^{-n}(-1)^nJ_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right]\\&=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(x)\cos n\theta\end{aligned} \tag{13}$$

平面波按柱面波展开 波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-v^2\nabla^2u=0$$

平面波解 ($\omega^2=v^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$)

$$\begin{aligned}u(\vec{r},t)&=u(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_yy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\end{aligned}$$

柱面波解 ($\omega^2=v^2(k_r^2+k_z^2)$)

$$\begin{aligned}u(\vec{r},t)&=u(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)\\&=J_n(k_rr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

设平面波沿 x 轴垂直于 z 轴传播

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{i(k_r r\cos\theta-\omega t)}$$

用柱面波表示

$$\begin{aligned}
&e^{i(k_r r\cos\theta-\omega t)}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_r r) e^{in\theta} e^{-i\omega t}\\
&= J_0(k_r r)e^{-i\omega t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k_r r)\cos n\theta e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

任意阶 Bessel 函数性质

6. Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的递推关系

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{15}$$

很容易由 Bessel 函数的定义得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}\frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}}\\
&= x^\nu J_{\nu-1}(x)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu-1}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!\Gamma(k+\nu+2)}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+\nu+1}}\\
&= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)
\end{aligned}$$

从这两个递推关系中消去 $J_\nu(x)$ 或 $J'_\nu(x)$, 可得

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{16}$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \tag{17}$$

由(17), 对于整数阶 Bessel 函数, 已知 $J_0(x)$, $J_1(x)$, 就可求得 $J_2(x)$, $J_3(x)$, ... 即 $J_n(x)$ 可用 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表示.

由(16), $J'_n(x)$ 也可用 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表示.

7. Bessel 函数的渐近展开$x \to 0$ 时

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}) \tag{18}$$

$x \to \infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg x| < \pi \tag{19}$$

8. Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的 Wronski 行列式

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix}$$

由 J_ν 满足方程 Bessel, 方程为二阶线性常微分方程

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = A\exp\left[-\int^x p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

对于 Bessel 方程, $p(x) = \frac{1}{x}$, 所以

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = A\exp[-\ln x + B] = \frac{C}{x}$$

令 $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
&W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] \\
=&\begin{vmatrix} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu & \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\frac{1}{2} & \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1}\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\right] \\
=&-\frac{2}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{x}\frac{\sin\pi\nu}{\pi}
\end{aligned}$$

所以, $C = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu$.

或令 $x \to \infty$, $|\arg x| < \pi$, 也得

$$\begin{aligned}
&W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \\
&\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu
\end{aligned}$$

9. 实数阶 (ν 实数) Bessel 函数的零点 当 $\nu > -1$时,

   (a) J_ν 有无穷多个零点,
   (b) 它们全部都是实数,
   (c) 对称地分布在实轴上.

   证明如下

(a) 无穷多个零点可由渐近表达式 $x \to \infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

看出. Bessel 函数为振荡函数,

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

为零点的近似值.

(b) 先证明当 $\nu > -1$ 时

$$\begin{aligned}&(a^2 - b^2)\int_0^x tJ_\nu(at)J_\nu(bt)dt \\ =&x\left[J_\nu(ax)\frac{\mathrm{d}J_\nu(bx)}{\mathrm{d}x} - J_\nu(bx)\frac{\mathrm{d}J_\nu(ax)}{\mathrm{d}x}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

由

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\frac{\mathrm{d}J_\nu(at)}{\mathrm{d}t}\right] + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)J_\nu(at) = 0 \\ \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\frac{\mathrm{d}J_\nu(bt)}{\mathrm{d}t}\right] + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)J_\nu(bt) = 0\end{aligned}$$

分别以 $tJ_\nu(bt)$ 和 $tJ_\nu(at)$ 乘两式, 相减, 再积分

$$\begin{aligned}&(a^2 - b^2)\int_0^x tJ_\nu(at)J_\nu(bt)dt \\ =&\left[tJ_\nu(at)\frac{\mathrm{d}J_\nu(bt)}{\mathrm{d}t} - tJ_\nu(bt)\frac{\mathrm{d}J_\nu(at)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}^{t=x}\end{aligned}$$

利用 $J_\nu(z)$ 的级数表达式, 当 $\nu > -1$ 时, 右方括号在 $t = 0$ 之值为 0.
由于 $J_\nu(z)$ 的级数表达式中的系数都是实数, 故

$$J_\nu^*(z) = J_\nu(z^*) \tag{21}$$

今设 α 为 $J_\nu(z)$ 的复数零点,

$$J_\nu(\alpha^*) = J_\nu^*(\alpha) = 0$$

所以, α^* 也是$J_\nu(z)$ 的零点, 取 $a = \alpha$, $b = \alpha^*$, $x = 1$, 得

$$(\alpha^2 - \alpha^{*2})\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\alpha^* t)dt = 0$$

而

$$\begin{aligned}&\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\alpha^* t)dt \\ =&\int_0^1 t\left|J_\nu(\alpha t)\right|^2 dt > 0\end{aligned}$$

故

$$\alpha^2 = \alpha^{*2} \qquad \alpha = \pm\alpha^*$$

所以 α 只能是实数或纯虚数.

但零点不能为纯虚数, 因为

$$
\begin{aligned}
J_\nu(\mathrm{i}\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= \left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

若 $\nu > -1$, 则 求和 > 0.

(c) 同样, 由级数表达式可得 $J_\nu(\alpha) = 0$, 则$J_\nu(-\alpha) = 0$, 所以 $J_\nu(x)$ 的零点对称地分布在实轴上.

进一步, 由

Rolle 罗尔定理 若

(a) $f(x)$在$[a, b]$上连续.

(b) $f(x)$在(a, b)内可导.

(c) $f(a) = f(b)$.

则存在$\xi \in (a, b)$, 使$f'(\xi) = 0$.

和递推关系可知道, $J_\nu(x)$ 的相邻两个零点之间必定有 $J_{\nu\pm1}(x)$ 的一个零点.

17.2 最陡下降法

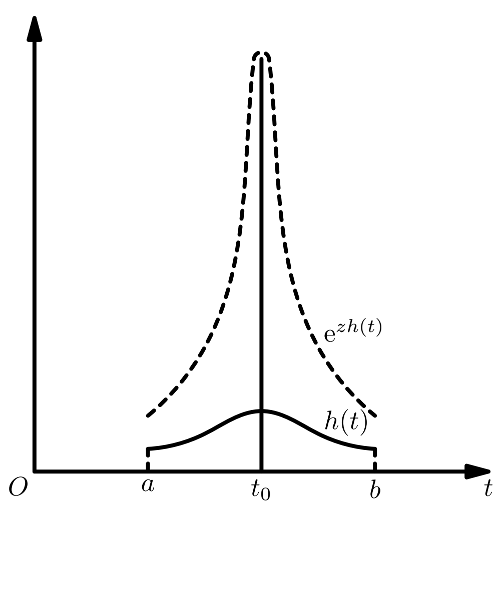
最陡下降法

为了求 Bessel 函数在变量 x 之值很大时的近似表示—*渐近表示*, 我们扼要地介绍一下最陡下降法. 这是求渐近展开的一种重要方法.

考虑要展开的函数具有下列积分表达式:

$$
f(z) = \int_a^b g(t)\mathrm{e}^{zh(t)}\mathrm{d}t \tag{22}
$$

当 z, t, $g(t)$, $h(t)$ 都是实数时, 如果 $h(t)$ 在积分区间中的某一点 t_0 有一极大值, 则在 z 充分大时, 经过指数函数 $\exp\{zh(t)\}$ 的“放大”, 这极大值和附近的值比起来显得异常陡峭.



例如, Γ 函数

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t+x\ln t}\mathrm{d}t$$

把 t 换成 xt, 得

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt+x\ln(xt)}\mathrm{d}t = x^x \int_0^\infty \mathrm{e}^{x(\ln t - t)}\mathrm{d}t \tag{23}$$

这时, $h(t) = \ln t - t$,

$$h'(t) = t^{-1} - 1$$
$$h''(t) = -t^{-2}$$

故在 $t=1$ 这点, $h(t)$ 有一极大值. 取 $t=1$ 附近一段 $[1-\delta, 1+\delta]$ $(\delta > 0)$ 的积分值作为近似, 并把 $h(t)$ 在 $t=1$ 的附近展开为

$$h(t) = \ln t - t \approx -1 - \frac{1}{2}(t-1)^2$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{x(\ln t - t)}\mathrm{d}t &\sim \int_{1-\delta}^{1+\delta} \mathrm{e}^{-x\{1+\frac{1}{2}(t-1)^2\}}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\mathrm{e}^{-x}\int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}u^2}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

当 $x \to \infty$ 时

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{x(\ln t - t)}\mathrm{d}t &\sim 2\mathrm{e}^{-x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\end{aligned}$$

最后

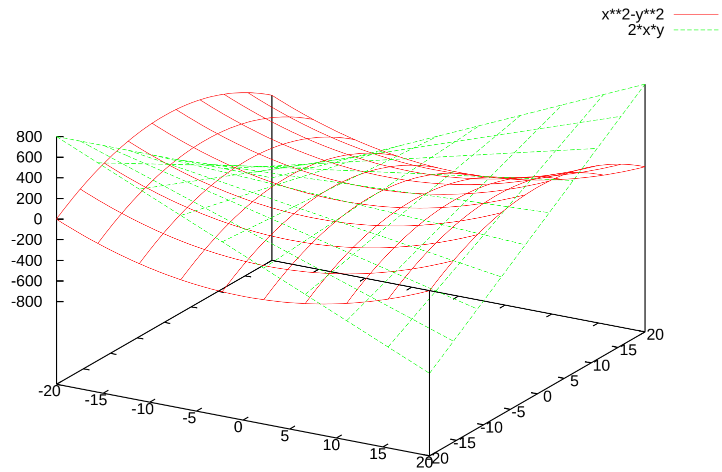
$$\Gamma(x) \sim x^{x-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi} \tag{24}$$

对于 Bessel 函数, 由整数阶 Bessel 函数的生成函数和求 Laurent 展开系数的积分公式, 可得

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}t^{-n-1}\mathrm{d}t \tag{25}$$

积分路线 C 是任意一个沿正向绕 $t=0$ 一周的围道.

当 $h(t)$ 是解析函数, 积分在复平面上进行时, 情形要复杂得多:



- 首先一个问题是, 决定 $\exp\{zh(t)\}$ 的模的大小的函数 $\mathrm{Re}\{zh(t)\}$ 是一个解析函数的实部, 没有极大值. 这可以从一个解析函数的实部必满足 Laplace 方程看出: 因为实部既然满足 Laplace 方程, 则其二阶导数不可能都是负的.

- 其次一个问题是, $\exp\{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}[zh(t)]\}$ 当 $|z|$ 很大时是一个震荡极快的函数.

下面来讨论解决这两个问题的方法, 在讨论中将假定 z 是正数. 因为如果 z 是复数 $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi = \arg z$, 可以把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 并到 $h(t)$ 中去.

根据 Cauchy 定理, 可以改变积分路线, 使它通过 $h'(t)$ 的零点 t_0, 并使在路线上

$$\mathrm{Im}[h(t)] = \mathrm{Im}[h(t_0)] \tag{26}$$

即沿积分路线 $h(t)$ 的虚部保持不变; 至少, 在通过 t_0 点的附近一小段上是如此.

方程(26) 所表示的曲线具有下列两个重要性质:

(i) 沿着这曲线, $\mathrm{Im}[h(t)] =$常数, 故 $\exp\{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}[zh(t)]\}$ 不再是一个震荡的函数.

(ii) 由于 $h(t)$ 是一个解析函数, $|h'(t)| = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$ 在这曲线上的每一点都有确定值, 其中 u_s 和 v_s 分别代表 $h(t)$ 的实部和虚部沿任意方向 s 的方向导数. 既然当 t 沿着曲线(26)变化时 $\mathrm{Im}[h(t)]$ 之值不变, 故 $v_s = 0$, 而 u_s 最大, 即 $\mathrm{Re}[h(t)]$ 之值沿着曲线(26)的变化与在同一点其他方向上的变化相比是最快的. 因此曲线(26) 称为*最陡路径*.

一般, 通过 $h'(t)$ 的零点 t_0 并满足条件(26)的曲线(即最陡路径), 而至少有两条. 作为积分路线, 须选其中这样的一条: $\mathrm{Re}[h(t)]$ 之值在 t_0 的两边都是下降的; 这样的路线称为*最陡下降路径*. 于是, 当 t 沿着最陡下降路径变化时, 若 $z \to +\infty$, 则 $\exp\{\mathrm{Re}[zh(t)]\}$ 在 t_0 点有一个很陡峭的极大值, 而可以按照实数情形那样求积分在 z 很大时的近似.

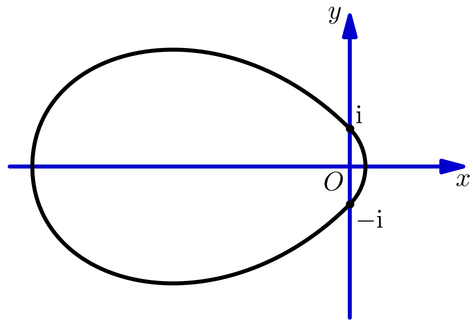
对于 Bessel 函数, $h(t) = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$. $h'(t) = \frac{1}{2}(1 + t^{-2})$ 的零点是 $t_0 = \pm\mathrm{i}$. $h''(\pm\mathrm{i}) = \mp\mathrm{i}$. 将 $h(t)$ 在 t_0 附近展开

$$h(t) \approx \pm\mathrm{i} \mp \frac{\mathrm{i}}{2}(t \mp \mathrm{i})^2$$

最陡下降路径为

$$t \mp \mathrm{i} = \rho\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi/4}$$

所以选择如下的积分路径



则

$$\begin{aligned}J_n(x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}t^{-n-1}\mathrm{d}t\\&\sim\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big\{-\mathrm{i}^{-n-1}\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\frac{x}{2}\rho^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{d}\rho\\&\qquad+(-\mathrm{i})^{-n-1}\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-\frac{x}{2}\rho^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{d}\rho\Big\}\\&\sim\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big\{-\mathrm{i}^{-n-1}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}\pi/4}\\&\qquad+(-\mathrm{i})^{-n-1}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+\mathrm{i}\pi/4}\Big\}\end{aligned}$$

整理一下

$$\begin{aligned}J_n(x)&\sim\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\Big\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}(n+1)\pi/2+\mathrm{i}\pi/4}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+\mathrm{i}(n+1)\pi/2-\mathrm{i}\pi/4}\Big\}\\&=\frac{1}{2\pi x}\Big\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-n\pi/2-\pi/4)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-n\pi/2-\pi/4}\Big\}\end{aligned}$$

故

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\qquad x\to\infty.\tag{27}$$

上述推导是比较粗略的, 因为在计算中忽略了最陡下降路径 C 的其他部分对积分的贡献. 但是可以严格证明, 上式确是 $J_n(x)$ 的渐近展开式的头一项, 而且这结果对于任何 ν 阶 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 成立. (参看, 例如, 王竹溪等, 特殊函数概论, 7.10节.)

17.3 Neumann 诺伊曼函数

当 ν 不等于整数时, $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 是 Bessel 方程的两个线性无关的解, 这时

$$W[J_\nu(x),J_{-\nu}(x)]=-\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu$$

当 ν 为整数时,

$$W[J_n(x),J_{-n}(x)]=0$$

说明它们线性相关, 第二解一定含有对数项. 定义 Neumann 函数

$$N_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

它也是 Bessel 方程的解, 且

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x}$$

Neumann 函数当 $n \to$ 整数 时, 为 $\frac{0}{0}$ 的极限. 所以整数阶的 Neumann 函数为

$$\begin{aligned}
N_n(x) &= \lim_{\nu\to n} \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \\
&= \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \\
&\quad \times \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}
\end{aligned} \tag{28}$$

其中对数函数中, 辐角 $|\arg x| < \pi$.

因为 Wronski 行列式总不为零, 所以 $N_n(x)$ 为与 $J_n(x)$ 线性无关的第二解.

渐近行为

$x \to 0$ 时

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\nu > 0 \qquad && N_\nu(x) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \\
&\nu = 0 && N_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

所以 $x = 0$ 为 Neumann 函数的奇点. $x \to \infty$ 时

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg x| < \pi$$

递推关系

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu N_\nu(x)\right] &= x^\nu N_{\nu-1}(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} N_\nu(x)\right] &= -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x)
\end{aligned}$$

Neumann 函数的递推关系的形式与 Bessel 函数完全相同. Bessel 函数又称为第一类柱函数, Neumann 函数称为第二类柱函数.

17.4 柱函数

凡是满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu C_\nu(x)\right] = x^\nu C_{\nu-1}(x) \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} C_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} C_{\nu+1}(x) \tag{30}$$

的函数 $\{C_\nu(x)\}$, 统称为柱函数. 前面介绍的 Bessel 函数和 Neumann 函数都是柱函数. 可以证明, 柱函数一定是 Bessel 函数的解:

Proof (29)改写为

$$C'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} C_\nu(x) = C_{\nu-1}(x) \tag{31}$$

(30)改写为

$$C'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} C_\nu(x) = -C_{\nu+1}(x)$$

即

$$C'_{\nu-1}(x) - \frac{\nu-1}{x} C_{\nu-1}(x) = -C_\nu(x)$$

再将(31)代入, 消去 $C_{\nu-1}(x)$

$$\begin{aligned} C''_\nu(x) + \frac{\nu}{x} C'_\nu(x) - \frac{\nu}{x^2} C_\nu(x) - \frac{\nu-1}{x} C'_\nu(x) \\ -\frac{(\nu-1)\nu}{x^2} C_\nu(x) = -C_\nu(x) \end{aligned}$$

即

$$C''_\nu(x) + \frac{1}{x} C'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) C_\nu(x) = 0$$

□

17.5 含 Bessel 函数的积分

在应用 Bessel 函数求解定解问题时, 自然会涉及的计算含 Bessel 函数的积分.

1. 被积函数为幂函数与 Bessel 函数的乘积.

$$\int x^\mu J_\nu(x) \mathrm{d}x$$

2. Bessel 函数的模方计算

$$\int x J_\nu^2(x) \mathrm{d}x$$

注意 Bessel 方程为 Sturm-Liouvelle 方程, 权重函数为 $\rho(x) = x$ (见下章).

幂函数与 Bessel 函数之积

$$\int x^\mu J_\nu(x) \mathrm{d}x$$

由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu) = x^\nu J_{\nu-1}$$

得

$$\begin{aligned} &\int x^\mu J_\nu(x) \mathrm{d}x \\ =&\int x^{\mu-\nu-1} x^{\nu+1} J_\nu(x) \mathrm{d}x \\ =&x^{\mu-\nu-1} x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \\ &-(\mu-\nu-1) \int x^{\mu-\nu-2} x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \mathrm{d}x \\ =&x^\mu J_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1) \int x^{\mu-1} J_{\nu+1}(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以, 分部积分一次, 积分换成 $\int x^{\mu-1}J_{\nu+1}(x)\mathrm{d}x$, ..., 分部积分 n 次, 积分换成 $\int x^{\mu-n}J_{\nu+n}(x)\mathrm{d}x$.

若 $(\mu-n)=(\nu+n)+1$, 则此时积分可积出,

$$\int x^{(\nu+n)+1}J_{\nu+n}(x)\mathrm{d}x = x^{\nu+n+1}J_{\nu+n+1}(x)$$

所以, 当 $\mu-\nu=2n+1$ 时, 积分可通过 n 次分部积分积出.

又由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\nu}J_\nu\right) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}$$

得

$$\begin{aligned}
&\int x^\mu J_\nu(x)\mathrm{d}x \\
=&\int x^{\mu+\nu-1}x^{-\nu+1}J_\nu(x)\mathrm{d}x \\
=&-x^{\mu+\nu-1}x^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x) \\
&+(\mu+\nu-1)\int x^{\mu+\nu-2}x^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x \\
=&-x^\mu J_{\nu-1}(x)+(\mu+\nu+1)\int x^{\mu-1}J_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

所以, 分部积分一次, 积分换成 $\int x^{\mu-1}J_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x$, ..., 分部积分 n 次, 积分换成 $\int x^{\mu-n}J_{\nu-n}(x)\mathrm{d}x$.

若 $(\mu-n)=-(\nu-n)+1$, 则此时积分可积出,

$$\int x^{-(\nu-n)+1}J_{\nu-n}(x)\mathrm{d}x = -x^{-(\nu-n)+1}J_{\nu-n-1}(x)$$

所以, 当 $\mu+\nu=2n+1$ 时, 积分也可通过 n 次分部积分积出.

Bessel 函数的模方计算

$$\int xJ_\nu^2(x)\mathrm{d}x$$

由 Bessel 方程

$$\frac{1}{x}(xJ_\nu')'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu=0$$

乘以 x^2J_ν'

$$\frac{1}{2}(xJ_\nu')^{2\prime}+\frac{1}{2}x^2(J_\nu^2)'-\frac{\nu^2}{2}(J_\nu^2)'=0$$

积分, 并对第二项作一次分部积分

$$\frac{1}{2}(xJ_\nu')^2-\frac{\nu^2}{2}J_\nu^2+\frac{1}{2}x^2J_\nu^2-\int xJ_\nu^2\mathrm{d}x+C=0$$

所以

$$\int xJ_\nu^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(xJ_\nu')^2+\frac{1}{2}(x^2-\nu^2)J_\nu^2+C$$

利用递推关系$(x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$, 消去$J_\nu'=\frac{\nu}{x}J_\nu-J_{\nu+1}$, 还可得到

$$\int xJ_\nu^2\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}(J_\nu^2+J_{\nu+1}^2)-\nu xJ_\nu J_{\nu+1}+C$$

17.6 Bessel 方程的本征值问题

Example 17.1 (求四周固定的圆形薄膜的振动问题) 取平面极坐标系, 偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0$$

c 代表波速. 边界条件和初始条件

$$\begin{aligned} &u|_{r=0}\text{有界} && u|_{r=a} = 0 \\ &u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} && \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi} \\ &u|_{t=0} = f(r,\phi) && \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r,\phi) \end{aligned}$$

Solution 分离变量

$$u(r,\phi,t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$$

得

$$\begin{aligned} &\Phi''(\phi) + m^2\Phi(\phi) = 0 \\ &\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \\ &\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right] + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0 \\ &R(0)\text{有界} \qquad R(a) = 0 \\ &T''(t) - c^2k^2T(t) = 0 \end{aligned}$$

Φ 本征值问题解, 采用复本征函数

$$\begin{aligned} &\text{本征值} && m^2 \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ &\text{本征函数} && \Phi_m(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \end{aligned}$$

R 本征值问题, 令 $x = kr$, $y(x) = R(r)$, 则方程化为 Bessel 方程, 所以方程通解

$$R(r) = CJ_m(kr) + DN_m(kr)$$

$R(0)$ 有界, $D = 0$. $R(a) = 0$, 而 $C \neq 0$, 得

$$J_m(ka) = 0$$

设 $\mu_i^{(m)}$ 是 m 阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的第 i 个正零点.

$$J_m(\mu_i^{(m)}) = 0 \qquad \mu_i^{(m)} > 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

则 $ka = \mu_i^{(m)}$, 所以

$$\begin{aligned} &\text{本征值} && k_{mi}^2 = \left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \\ &\text{本征函数} && R_{mi}(r) = J_m(k_{mi}r) = J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \end{aligned}$$

代入 T 方程得

$$T_{mi}(t) = A_{mi}\cos\omega_{mi}t + B_{mi}\sin\omega_{mi}t$$

其中

$$\omega_{mi} = ck_{mi} = \frac{c\mu_i^{(m)}}{a}$$

称为圆形薄膜的固有频率.

特解

$$\begin{aligned}u_{mi}(r,\phi,t) = J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \\ \times \left(A_{mi}\cos\omega_{mi}t + B_{mi}\sin\omega_{mi}t\right)\end{aligned}$$

一般解

$$\begin{aligned}u(r,\phi,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \\ \times \left(A_{mi}\cos\omega_{mi}t + B_{mi}\sin\omega_{mi}t\right)\end{aligned}$$

代入初始条件

$$u|_{t=0} = f(r,\phi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r,\phi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{mi} B_{mi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

写出正交关系

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\right)^* \mathrm{d}\phi = 2\pi\delta_{mn}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^a J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) J_m\left(\frac{\mu_j^{(m)} r}{a}\right) r\mathrm{d}r \\ &= \left\| J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\|^2 \delta_{ij}\end{aligned}$$

注意权重 $\rho(r) = r$.

利用上节公式计算模方

$$\begin{aligned}&\int_0^a J_m^2\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) r\mathrm{d}r \\ =&\left\{\frac{1}{2} r^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right. \\ &\left.+\ \frac{1}{2}\left[r^2 - m^2\left(\frac{a}{\mu_i^{(m)}}\right)^2\right] J_m^2\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\}_0^a \\ =&\frac{1}{2} a^2 J_m'^2\left(\mu_i^{(m)}\right)\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
A_{mi} = & \frac{1}{2\pi \left\| J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \right\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \\
& \times f(r,\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \\
B_{mi} = & \frac{1}{2\pi \left\| J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \right\|^2 \omega_{mi}} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \\
& \times g(r,\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
2\pi \left\| J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \right\|^2 &= \pi a^2 J_m'^2\left(\mu_i^{(m)}\right) \\
2\pi \left\| J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \right\|^2 \omega_{mi} &= \pi a c \mu_i^{(m)} J_m'^2\left(\mu_i^{(m)}\right)
\end{aligned}
$$

□

下面讨论一个具体问题.

Example 17.2 圆柱体的冷却. 设有一个无穷长的圆柱体, 半径为 a. 采用柱坐标系, z 轴即为圆柱体的对称轴. 如果柱体的表面温度维持为 0, 初温为 $u_0 f(r)$, 试求柱体内温度的分布和变化.

Solution 显然, 温度 u 与 ϕ, z 无关

$$u = u(r,t)$$

定解问题为

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \\
& u|_{r=0} \text{有界} \qquad u|_{r=a} = 0 \\
& u|_{t=0} = u_0 f(r)
\end{aligned}
$$

分离变量

$$u(r,t) = R(r) T(t)$$

...

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right] + k^2 R(r) = 0 \\
& R(0) \text{有界} \qquad R(a) = 0
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
\text{本征值} \qquad & k_i^2 = \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 \\
\text{本征函数} \qquad & R_i(r) = J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$J_0(\mu_i) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, ...$$

$$T' + \kappa k_i^2 T = 0$$

所以

$$T_i(t) = c_i \exp\left[-\kappa \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

特解

$$u_i(r,t) = c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) \exp\left[-\kappa \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

一般解

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) \exp\left[-\kappa \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

代入初条件

$$u(r,t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) = u_0 f(r)$$

所以

$$c_i = \frac{1}{\left\|J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\right\|^2} \int_0^a u_0 f(r) J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) r \mathrm{d}r$$

其中

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2} a^2 J_0'^2(\mu_i)$$

由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

得

$$J_0'(\mu_i) = -J_1(\mu_i)$$

所以

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(\mu_i)$$

设 $f(r) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2$

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 J_1^2(\mu_i)} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) r \mathrm{d}r$$

令 $\frac{r}{a} = x$

$$c_i = \frac{2u_0}{J_1^2(\mu_i)} \int_0^1 (1 - x^2) J_0(\mu_i x) x \mathrm{d}x$$

x的幂次$-J$的幂次$=$ 奇数, 积分可递推求出

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1 - x^2) J_0(\mu_i x) x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1 - x^2) \frac{1}{\mu_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x J_1(\mu_i x)] \mathrm{d}x \\
&= (1 - x^2) \frac{1}{\mu_i} x J_1(\mu_i x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu_i} \int_0^1 x^2 J_1(\mu_i x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\mu_i^2} x^2 J_2(\mu_i x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu_i^2} J_2(\mu_i)
\end{aligned}$$

由递推关系

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

令$\nu=1$

$$J_0(\mu_i)+J_2(\mu_i)=J_2(\mu_i)=\frac{2}{\mu_i}J_1(\mu_i)$$

所以

$$\int_0^1(1-x^2)J_0(\mu_i x)x\mathrm{d}x=\frac{4}{\mu_i^3}J_1(\mu_i)$$

$$c_i=\frac{2u_0}{J_1^2(\mu_i)}\frac{4}{\mu_i^3}J_1(\mu_i)=\frac{8u_0}{\mu_i^3J_1(\mu_i)}$$

□

17.7 Hankel 函数

$J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 的渐近展开分别为

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

电磁学常用这两个函数的线性组合作成的一种复的柱函数

$$H_\nu^{(1)}(x)\equiv J_\nu(x)+\mathrm{i}N_\nu(x) \tag{32}$$

$$\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{33}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\equiv J_\nu(x)-\mathrm{i}N_\nu(x) \tag{34}$$

$$\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{35}$$

称为第一类和第二类 Hankel 函数. 它们都是柱函数, 称为第三类柱函数.

17.8 球 Bessel 函数

在球坐标系下考虑Helmholtz方程

$$\nabla^2u+k^2u=0$$

分离变量

$$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)=R(r)Y_l^m(\theta,\phi)$$
$$l=0,1,2,...,m=0,\pm1,\pm2,...$$

R 方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

作变换 $x=kr$, $y(x)=R(r)$, 方程变为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0$$

称为球 Bessel 方程. 球 Bessel 方程作变换 $y(x)=\frac{v(x)}{\sqrt{x}}$ 可化为 Bessel 方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)+\left[1-\frac{(l+1/2)^2}{x^2}\right]v=0$$

半奇数 $l+1/2$阶的 Bessel 方程的解为

$$\begin{aligned}&J_{l+1/2}(x)\\&J_{-l-1/2}(x)=(-1)^{l+1}N_{l+1/2}(x)\end{aligned}$$

球 Bessel 方程的解则为

$$\begin{aligned}j_l(x)&=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+l}\\n_l(x)&=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x)=(-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-l-1/2}(x)\\&=(-1)^{l+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-l+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-l-1}\end{aligned}$$

分别称为 l 阶球 Bessel 函数和球 Neumann 函数.

$$\begin{aligned}j_0(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(3/2)}{n!\Gamma(n+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!(n+1/2)(n-1/2)\cdots(3/2)\cdot 2^n}\\&\quad\times x^{2n}\\&=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

同理

$$n_0(x)=-\frac{\cos x}{x}$$

由 Bessel 函数递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\nu}J_{\nu})=x^{\nu}J_{\nu-1}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{l+1}j_l)=x^{l+1}j_{l-1}$$

由 Bessel 函数递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}J_{\nu})=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-l}j_l)=-x^{-l}j_{l+1}$$

以上公式对 n_l 也成立.

递推关系允许我们由 $j_0(n_0)$ 求任意阶球函数的表达式.

$$j_1(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} j_0(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x)$$
$$j_l(x) = x^l \left(-\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^l \left\{\frac{\sin x}{x}\right\}$$

同样

$$n_1(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} n_0(x) = -\frac{1}{x^2}(\cos x + x\sin x)$$
$$n_l(x) = x^l \left(-\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^l \left\{-\frac{\cos x}{x}\right\}$$

类似地, 也可定义球 Hankel 函数

$$h_l^{(1)} = j_l(x) + \mathrm{i}n_l(x)$$
$$h_l^{(2)} = j_l(x) - \mathrm{i}n_l(x)$$

渐近行为 $x \to \infty$

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x}\sin(x - \frac{l\pi}{2})$$
$$n_l(x) \sim -\frac{1}{x}\cos(x - \frac{l\pi}{2})$$
$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{1}{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\frac{l\pi}{2})}$$
$$h_l^{(2)}(x) \sim \frac{\mathrm{i}}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\frac{l\pi}{2})}$$

Example 17.3 将函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$ 按 *Legendre* 多项式展开

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

Solution 展开系数为

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}krx} P_l(x)\mathrm{d}x$$

将指数函数做 Taylor 展开

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\int_{-1}^{1} x^n P_l(x)\mathrm{d}x.$$

利用上章结果

$$\begin{aligned}c_l(kr)=&\frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)\mathrm{d}x\\=&\frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n}\\&\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+l+3/2)}\\=&\frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}\\=&(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr).\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

□

球面波

球面波为波动方程 (设时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 省略)

$$\nabla^2u+k^2u=0$$

的球坐标系下的解

$$j_l(kr)Y_l^m(\theta,\phi)$$

$m=0$ 时, 与 ϕ 无关的球面波

$$\sim j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 可用球面波展开. 设 $\vec{k}$ 沿 z 轴方向

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

Example 17.4 *一均匀球, 半径为 a, 初始温度分布为 $f(r)\cos\theta$. 若球面温度保持为零度, 求球内各处温度变化的情况.*

Solution 问题有对称性

$$u=u(r,\theta,t)$$

所以定解问题为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]=0\\&u|_{r=0}\text{有界}\qquad u|_{r=a}=0\\&...\\&u|_{t=0}=f(r)\cos\theta\end{aligned}$$

令

$$u(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

可得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta=0$$
$$\Theta(0)\text{有界}\qquad\Theta(\pi)\text{有界}$$

$$\lambda_l=l(l+1)$$
$$\Theta_l(\cos\theta)=P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$
$$R(0)\text{有界}\qquad R(a)=0$$

方程的解

$$R(r)=Aj_l(kr)+Bn_l(kr)$$
$$R(0)\text{有界}\Rightarrow B=0$$
$$R(a)=0\&\&A\neq0\Rightarrow j_l(ka)=0$$

所以

$$k_{li}=\frac{\mu_i^{(l)}}{a}$$
$$R_{li}(r)=j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)}r}{a}\right)$$

其中

$$j_l(\mu_i^{(l)})=0\qquad i=1,2,3,...$$

$$T'+\kappa k^2T=0$$
$$T_{li}(t)=A_{li}\mathrm{e}^{-\kappa k_{li}^2t}$$

特解

$$u_{li}(r,\theta,t)=A_{li}j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)}r}{a}\right)P_l(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\kappa k_{li}^2t}$$

一般解

$$u(r,\theta,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{li}j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)}r}{a}\right)P_l(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\kappa k_{li}^2t}$$

代入初始条件

$$\begin{aligned}u(r,\theta,t)|_{t=0}&=f(r)\cos\theta=f(r)P_1(\cos\theta)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{li}j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)}r}{a}\right)P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

所以, $A_{li}=A_{1i}\delta_{l1}$

$$f(r)=\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)$$

正交关系 (权重 $\rho(r)=r^2$)

$$\int_0^a j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)j_1\left(\frac{\mu_j^{(1)}r}{a}\right)r^2\mathrm{d}r=\left\|j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)\right\|^2\delta_{ij}$$

$$\begin{aligned}\left\|j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)\right\|^2&=\int_0^a j_1^2\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}\frac{a}{\mu_i^{(1)}}\int_0^a J_{3/2}^2\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)r\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}\frac{a}{\mu_i^{(1)}}\frac{a^2}{2}J_{3/2}'^2(\mu_i^{(1)})\\&=\frac{a^3}{2\mu_i^{(1)}}\left.(\sqrt{x}j_1(x))'^2\right|_{x=\mu_i^{(1)}}\\&=\frac{a^3}{2}j_1'^2(\mu_i^{(1)})\end{aligned}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{l+1}j_l)=x^{l+1}j_{l-1}$$

得$(x^2j_1)'=x^2j_0$

$$j_1'(\mu_i^{(1)})=j_0(\mu_i^{(1)})$$

故

$$\left\|j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)\right\|^2=\frac{a^3}{2}j_0^2(\mu_i^{(1)})$$

所以

$$A_{1i}=\frac{\int_0^a f(r)j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)r^2\mathrm{d}r}{\frac{a^3}{2}j_0^2(\mu_i^{(1)})}$$

$$\begin{aligned}u(r,\theta,t)=\frac{2}{a^3}\sum_{i=1}^{\infty}&\frac{j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)P_1(\cos\theta)}{j_0^2(\mu_i^{(1)})}\mathrm{e}^{-\kappa\left(\frac{\mu_i^{(1)}}{a}\right)^2t}\\&\times\int_0^a f(r)j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)r^2\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$j_1(\mu_i^{(1)})=0$ 即

$$\frac{1}{\mu_i^{(1)2}}\left[\sin\mu_i^{(1)}-\mu_i^{(1)}\cos\mu_i^{(1)}\right]=0$$

$$\mu_i^{(1)}=\tan\mu_i^{(1)}$$

□

17.9 合流超几何函数

容易看出, 超几何级数

$$y = {}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{array}; x\right) \tag{36}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{37}$$

是如下微分方程的形式解

$$\{\delta(\delta + b_1 - 1) \cdots (\delta + b_q - 1) \tag{38}$$

$$- x(\delta + a_1) \cdots (\delta + a_p)\} y = 0 \tag{39}$$

其中

$$\delta = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

当 $p > 2$ 或 $q > 1$, 上述方程的阶数为 $\max(p, q+1) > 2$, 所得方程不如二阶常微分方程有用. 若只考虑二阶常微分方程, 则有如下两种可能

1. $p = 2$

   这时, 必须 $q = 1$, 否则, 超几何级数处处发散. 而${}_2F_1$ 就是我们上一章介绍过的超几何函数.

2. $q = 1$ 和$p = 0, 1$

   二阶常微分方程具有一个正则奇点 $x = 0$, 另外还有一个非正则奇点在 $x = \infty$ 处.

合流超几何函数

我们来考虑 $p = q = 1$ 的情形. 这时方程是

$$\left\{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \gamma - 1\right) - x\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha\right)\right\} y = 0$$

或

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \tag{40}$$

称为*合流超几何方程*. 这一方程可以由超几何方程的两个正则奇点合流而得到. 超几何方程

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta w = 0$$

作变换 $x \to x/b$

$$x(1 - x/b)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x/b]y' - \alpha\beta w/b = 0$$

这个方程的奇点当然就是 0, b 和 ∞. 令 $b = \beta \to \infty$, 就得到上述合流超几何方程.

合流超几何方程在正则奇点 $z = 0$ 处的指标为 $\rho = 0$ 和 $\rho = 1 - \gamma$, 当 $\gamma \neq$整数时, 用级数解法可以求得方程的两个线性无关解为

$$y_1(x) = F(\alpha; \gamma; x) \tag{41}$$

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; x) \tag{42}$$

其中

$$F(\alpha; \gamma; x) = {}_1F_1\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \end{array}; x\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + n)} x^n \tag{43}$$

在全平面解析, 称为*合流超几何函数*.

有许多特殊函数都能用合流超几何函数表示. 例如:

- Bessel 函数

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu F(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2\mathrm{i}z)$$

- Hermite 多项式

$$H_{2n}(z)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}F(-n;\frac{1}{2};z^2)$$
$$H_{2n+1}(z)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}F(-n;\frac{3}{2};z^2)$$

- Laguerre 多项式

$$L_n(z)=F(-n;1;z)$$

- 广义 Laguerre 多项式

$$L_n^\mu(z)=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}F(-n;\mu+1;z)$$

Problems

1. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x}\sin\left(a\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x,\quad a>0;$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}J_0\big(\sqrt{bx}\big)\mathrm{d}x,\quad a>0,\ b\geq 0;$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}J_\nu(bx)x^{\nu+1}\mathrm{d}x,\qquad \nu>-1,\ a>0,\ b>0;$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \exp\big\{-a^2x^2\big\}J_\nu(bx)x^{\nu+1}\mathrm{d}x,\qquad \nu>-1,\ a>0,\ b>0.$

2. 证明:

(1) $\cos x=J_0(x)-2J_2(x)+2J_4(x)-+\cdots;$

(2) $x=2\big[J_1+3J_3(x)+5J_5(x)+\cdots\big];$
$\sin x=2J_1(x)-2J_3(x)+2J_5(x)-+\cdots;$

(3) $\displaystyle x^2=2\sum_{n=1}^\infty(2n)^2J_{2n}(x);$

(4) $\displaystyle J_0^2(x)+2\sum_{n=1}^\infty J_n^2(x)=1.$

3. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^x x^{-n}J_{n+1}(x)\mathrm{d}x;$

(2) $\displaystyle\int_0^a x^3J_0(x)\mathrm{d}x;$

(3) $\displaystyle\int_0^t J_0\big(\sqrt{x(t-x)}\big)\mathrm{d}x;$

(4) $\int_0^t \left[\sqrt{x(t-x)}\right]^n J_n\big(\sqrt{x(t-x)}\big)\mathrm{d}x.$

4. 半径为R的圆形膜，边缘固定，初始形状呈旋转抛物面

$$u\big|_{t=0} = A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

形，初速为0．求解圆膜的横振动问题．

5. 求解下列定解问题：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\Big] = 0,\\
&u\big|_{r=0}\,\text{有界}, \qquad u\big|_{r=a} = 0,\\
&u\big|_{t=0} = u_0 \sin 2\phi.
\end{aligned}$$

6. 一长为π、半径为1的圆柱形导体，柱体的侧面和上下底的温度均保持为0，初始时柱体内的温度分布为$f(r)\sin nz$，求柱体内温度的分布与变化．

7. 一空心圆柱，内半径为a，外半径为b，维持内外柱面的温度为0．又设柱体高h，上下底绝热，初温为u_0，求柱体内温度的分布与变化．

8. 求解圆形薄膜的受迫振动．设膜的半径为R，边缘固定，初位移与初速度均为0．膜上单位质量受周期力作用：

   (1) $f(r,t) = A\sin\omega t$;

   (2) $f(r,t) = A\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)\sin\omega t.$

9. 计算积分：

   (1) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax/2}\sin bx\, I_0\Big(\dfrac{ax}{2}\Big)\,\mathrm{d}x,\ \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax/2}\cos bx\, I_0\Big(\dfrac{ax}{2}\Big)\,\mathrm{d}x,$
   其中$a>0,\ b>0$;

   (2) $\int_0^\infty J_0(\alpha x)K_0(\beta x)x\mathrm{d}x, \qquad \alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0.$

10. 高为h、半径为a的圆柱体，上下底保持温度为0，而柱面温度为$u_0\sin\dfrac{2\pi}{h}z$，求柱体内的稳定温度分布．这里取定上下底所在的平面分别为$z=h$和$z=0$．

11. 半径为a的导体球，初温为常数u_0，球面温度为0．求球内温度的分布和变化．

12. 求长圆柱形和圆形铀块的临界半径．