8　Γ 函数

8.1　Γ 函数的定义

Γ 函数的积分表达式

当 $\mathrm{Re}z > 0$ 时, 定义

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \tag{1}$$

被积函数中 t^{z-1} 当 z 不是整数时为 t 的多值函数, 这时应该理解为

$$\arg t = 0 \tag{2}$$

Theorem 8.1　*Γ 函数的积分表达式 (1) 在右半平面 $\mathrm{Re}z > 0$ 代表 z 的一个解析函数.*

Proof　因为这是一个反常积分, 既是瑕积分 (在 $t = 0$ 端), 又是无穷积分, 所以要拆成两部分来分别讨论.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t. \tag{3}$$

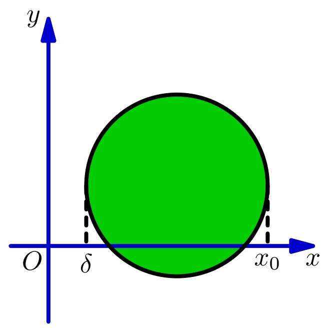
先看第二部分. 显然当 $t \geq 1$ 时, 被积函数$\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$ 是t的连续函数, 并且作为 z 的函数, 在全平面解析. 由第4章可知, 要证明一个含参数的无穷积分代表一个解析函数，还需证明积分闭一致收敛.

因为

$$\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!},$$

所以 ∀正整数N,

$$\mathrm{e}^t > \frac{t^N}{N!}, \qquad \mathrm{e}^{-t} < \frac{N!}{t^N}.$$



如图, 对于 $\mathbb{C}$ 上任一闭圆, 均有 $\mathrm{Re}z < x_0$. 当 $t \geq 1$ 时

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t} t^{\mathrm{Re}z-1} < N! \cdot t^{x_0-N-1}.$$

这样, 只要选择足够大的N, 使得 $N > x_0$, 积分 $\displaystyle\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t$ 就收敛, 故

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

在 $\mathbb{C}$ 上闭一致收敛, 因此在全平面解析.

要证明第一部分的积分在右半平面解析, 关键也是证明它的闭一致收敛性.

同样

$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}, \qquad x = \mathrm{Re}z.$$

因此, 对于 $\mathrm{Re}z>0$ 上的任一闭圆, 因为有 $\mathrm{Re}z=x\geq\delta>0$, 对于 $0<t\leq 1$

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right|\leq t^{\delta-1},$$

而 $\displaystyle\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛, 由此即可推知积分

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

在 $\mathrm{Re}z>0$ 上闭一致收敛, 故积分在右半平面解析.

把两部分合起来, 就证得 Γ函数的积分表达式 (1) 在 z 的右半平面解析. □

Γ 函数的解析延拓

上面介绍的 Γ 函数的定义只适用于 $\mathrm{Re}z>0$. 为了延拓到 z 的全平面, 我们仍把积分拆成两部分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

其中第二部分积分 $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 对任意的 z 收敛, 并且在 z 的全平面解析. 对于第一部分, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\qquad(\mathrm{Re}z>0)\end{aligned}$$

等式中, 左端积分表达式仅在 $\mathrm{Re}z>0$ 时, 即在 z 的右半平面存在, 解析. 而右端函数级数则在 $z\neq 0,-1,-2,\ldots$ 的全平面收敛, 解析 (不证). 在公共部分 $\mathrm{Re}z>0$ 相等. 所以右端函数级数就是左端积分表达式在全平面上的解析延拓. 于是就完成了 Γ 函数的解析延拓, 重新定义的 Γ 函数为

$$\Gamma(z)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\tag{4}$$

除去 $z=0,-1,-2,\ldots$ 为其一阶极点外, 全平面解析.

8.2 Γ 函数的基本性质

性质1

$$\Gamma(1)=1$$

Proof 直接在 Γ 函数的定义 (1) 中代入 $z=1$ 即得

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

□

性质2

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

Proof Re$z>0$ 时, 由 Γ 函数的定义 (1)

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^z\mathrm{d}t=-\int_0^\infty t^z\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})\\&=-\left.\mathrm{e}^{-t}t^z\right|_0^\infty+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}zt^{z-1}\mathrm{d}t=z\Gamma(z)\end{aligned}$$

推广到全平面 ($z=0,\,-1,\,-2,\,\ldots$ 除外). 因为 $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 都在除去 $z=0,\,-1,\,-2,\,\ldots$ 点的整个复平面解析, 而在右半平面相等. 由解析函数的唯一性定理, $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 在全平面恒等, 即 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 在全平面成立. □

推论1

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Proof 由性质1, 反复引用性质2即得. □

性质3: 互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

证明见后面B函数一节.

推论2

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

Proof 性质3中令 $z=\frac{1}{2}$

$$\Gamma^2(\frac{1}{2})=\pi$$

$z=\frac{1}{2}$ 时, 在积分表达式 (1) 中, 被积函数恒为正, 所以 $\Gamma(1/2)>0$. 于是 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. □

推论3
Γ 函数在全平面无零点.

Proof 因 $\pi/\sin\pi z\neq 0$, 故 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$. 因此,

$$\Gamma(z_0)=0\Rightarrow\Gamma(1-z_0)=\infty$$

即 $1-z_0$ 为函数的极点. 这只能发生在 $1-z_0=-n,\,n=0,1,2,\cdots$ 处. 但这时 $z_0=n+1$, 而 $\Gamma(n+1)=n!\neq 0$. 矛盾. □

性质4: 倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \tag{5}$$

证明见后.

性质5: Stirling 公式
当 $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$ 时,

$$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi} \tag{6}$$

$$\ln\Gamma(z)\sim(z-\frac{1}{2})\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi \tag{7}$$

由此

$$\ln n!=\ln\Gamma(n+1)\sim n\ln n-n$$

上面公式在统计物理学中经常用到.

Γ 函数的渐近展开

z 为实数 x 的情形,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x\mathrm{d}t.$$

假设 $x>0$, 分析一下积分的被积函数, 它在 $t=0$ 时为 0, 随着 t 的增大而增大, 当 $t=x$ 时达到极大, 而后又单调下降. 先将被积函数写成

$$\mathrm{e}^{-t}t^x=\mathrm{e}^{-t+x\ln t}.$$

作变量代换, $t\to xt$, 得到

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(t-\ln t)}\mathrm{d}t.$$

由于指数函数的变化特点, 现在被积函数对积分的贡献主要来自 $t=1$ 附近的区间, 并且随着 $x\to\infty$, 这个区间会是一个很窄的区间. 将函数 $t-\ln t$ 在 $t=1$ 点作 Taylor 展开:

$$t-\ln t=1+\frac{(t-1)^2}{2}+\cdots.$$

就得到 Γ 函数的近似表达式

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)\approx&x^{x+1}e^{-x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}(t-1)^2}\mathrm{d}t\\ \approx&x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}(t-1)^2}\mathrm{d}t\\ =&x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}}\Gamma(1/2)=x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi x}.\end{aligned}$$

而

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=x^{x-1/2}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi}.$$

这个方法称为最陡下降法.

性质4: 倍乘公式的证明 考虑函数

$$g(z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2z)}.$$

利用 Γ 函数的基本性质

$$\Gamma(z+1)=x\Gamma(z)$$

容易证明

$$g(z+1)=g(z).$$

由 Stirling 公式可得: $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$ 时, $g(x)\sim 1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}g(x+n)=1.$$

所以

$$g(x)=g(x+n)=1.$$

$\square$

Gauss 乘积公式

一般地, 可以证明下列乘积公式

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\Gamma(z+\frac{2}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n})$$
$$=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz) \tag{8}$$

8.3 ψ 函数

ψ 函数

ψ 函数是 Γ 函数的对数的导数

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{9}$$

根据 Γ 函数的性质, 可以得到 $\psi(z)$ 的性质.

1. $z=0,-1,-2,\cdots$ 都是 $\psi(z)$ 的一阶极点, 留数均为 -1; 除了这些点以外, $\psi(z)$ 在全平面解析.
2. $$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}, \tag{10}$$
$$\psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1},$$
$$n=2,3,\cdots. \tag{11}$$
3. $$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z \tag{12}$$
4. $$\psi(z)-\psi(-z)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z \tag{13}$$
5. $$\psi(2z)=\frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+\ln 2. \tag{14}$$
6. $$\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\frac{1}{252z^6}+\cdots,$$
$$z\to\infty, |\arg z|<\pi \tag{15}$$
7. $$\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0. \tag{16}$$

由性质2和性质7, 得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}-\ln n\right]=0$$

即

$$\psi(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}\right)\right] \tag{17}$$

例如, 令 $z=1$, 可得

$$\psi(1)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

ψ 函数的特殊值

$$\psi(1) = -\gamma$$

γ 是数学中的一个基本常数, 称为 Euler 常数,

$$\gamma = 0.577215664\cdots$$

由 ψ 函数的递推关系(性质2)和渐近行为(性质6), 可得

$$\begin{aligned}\psi(z) - \psi(1) =& \psi(z+N+1) - \psi(N+2) \\ & - \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{1+k} \right) \\ =& -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{1+k} \right)\end{aligned}$$

设 $z = p/q$, p, q 为正整数, $0 < p < q$. 则

$$\psi(p/q) - \psi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{q}{p+nq} \right).$$

由 Abel 第二定理

$$\begin{aligned}\psi(p/q) - \psi(1) &= \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{q}{p+nq} \right) t^{p+nq} \\ &\equiv \lim_{t\to 1^-} s(t).\end{aligned}$$

Theorem 8.2 (Simpson's dissection (解剖)) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn+m} x^{kn+m} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \omega^{-mj} f(\omega^j x),$$

其中 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$, $0 \le m < k$.

Proof 利用

$$\sum_{j=0}^{k-1} \omega^{jm} = 0, \quad m \not\equiv 0 \mod k.$$

$\square$

利用

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1},$$

令 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/q}$, 计算得

$$\begin{aligned}s(t) =& -t^{p-q} \ln(1-t^q) + \sum_{n=0}^{q-1} \omega^{-np} \ln(1-\omega^n t) \\ =& -t^{p-q} \ln \frac{1-t^q}{1-t} - (t^{p-q}-1)\ln(1-t) \\ & + \sum_{n=1}^{q-1} \omega^{-np} \ln(1-\omega^n t)\end{aligned}$$

令 $t \to 1^-$, 得
$$\psi(p/q) = -\gamma - \ln q + \sum_{n=1}^{q-1} \omega^{-np} \ln(1-\omega^n).$$
将 p 换成 $q-p$ 再两式相加
$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) + \psi\left(\frac{q-p}{q}\right) = -2\gamma - 2\ln q + 2\sum_{n=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right) \ln(1-\omega^n).$$
取实部
$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) + \psi\left(\frac{q-p}{q}\right) = -2\gamma - 2\ln q + \sum_{n=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right) \ln\left(2 - 2\cos\frac{2\pi n}{q}\right).$$
由性质4, 又得
$$\psi(p/q) - \psi(1-p/q) = -\pi\cot\pi p/q.$$
相加得
$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q} - \ln q + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right) \ln\left(2 - 2\cos\frac{2\pi n}{q}\right).$$
或
$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q} - \ln q + \sum_{n=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right) \ln\left(2\sin\frac{\pi n}{q}\right).$$
令 $p=1$, $q=2$, 得
$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$$
令 $p=1,3$, $q=4$, 得
$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$$
$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$$
再令 $p=1,2$, $q=3$, 又得
$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$$
$$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$$

ψ 函数的导数值

由性质2, 对 z 求导可得

$$
\begin{aligned}
&\psi'(z+1)=\psi'(z)-\frac{1}{z^2}, && (18)\\
&\psi'(z+n)=\psi'(z)\\
&\qquad\qquad -\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n-1)^2}\right],\\
&\qquad\qquad n=2,3,\cdots. && (19)
\end{aligned}
$$

性质3对 z 求导, 然后令 $z=\frac{1}{2}$, 得

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi^2\csc^2\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

再由性质5求导, 并令 $z=\frac{1}{2}$, 得

$$\psi'(1)=\frac{1}{3}\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

ψ 函数应用

利用 ψ 函数, 可以方便地求出许多无穷级数的和.

Example 8.1 求无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

之和.

Solution 因为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=&\frac{1}{6}\frac{1}{n+1/3}-\frac{1}{3}\frac{1}{n+2/3}\\
&+\frac{1}{6}\frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\
=&\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1/3}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2/3}+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\\
=&\frac{1}{6}\left[\psi\left(N+1+\frac{1}{3}\right)-\psi\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\
&-\frac{1}{3}\left[\psi\left(N+1+\frac{2}{3}\right)-\psi\left(\frac{2}{3}\right)\right]\\
&+\frac{1}{6}\left[\psi(N+2)-\psi(1)\right]
\end{aligned}
$$

每项都减去 $\ln N$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\=&\frac{1}{6}\left[\psi\left(N+1+\frac{1}{3}\right)-\ln N-\psi\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\&-\frac{1}{3}\left[\psi\left(N+1+\frac{2}{3}\right)-\ln N-\psi\left(\frac{2}{3}\right)\right]\\&+\frac{1}{6}\left[\psi(N+2)-\ln N-\psi(1)\right]\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 即得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\&=-\frac{1}{6}\left[\psi\left(\frac{1}{3}\right)-2\psi\left(\frac{2}{3}\right)+\psi(1)\right]\end{aligned}$$

代入 ψ 函数的特殊值, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 3\right]$$

□

Example 8.2 *求无穷级数*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$$

之和.

Solution 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}=&\frac{4}{n+1}-\frac{4}{n+1/2}\\&+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1/2)^2}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}\\=&4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}-4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1/2}\\&+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1/2)^2}\\=&4\left[\psi(N+2)-\psi(1)\right]-4\left[\psi(N+3/2)-\psi(1/2)\right]\\&+\left[\psi'(1)-\psi'(N+2)\right]+\left[\psi'(1/2)-\psi'(N+3/2)\right]\end{aligned}$$

同样, 减以 $\ln N$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}\\
=&4\left[\psi(N+2)-\ln N-\psi(1)\right]\\
&-4\left[\psi(N+3/2)-\ln N-\psi(1/2)\right]\\
&+\left[\psi'(1)-\psi'(N+2)\right]+\left[\psi'(1/2)-\psi'(N+3/2)\right]
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$, 并注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi'(n+z)=0$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}\\
&=4\left[\psi(1/2)-\psi(1)\right]+\psi'(1)+\psi'(1/2)\\
&=\frac{2\pi^2}{3}-8\ln 2
\end{aligned}
$$

□

8.4 B函数

在 $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 时定义

$$
\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \tag{20}
$$

令 $t=\sin^2\theta$, 还可以得到B函数的另一个表达式

$$
\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \tag{21}
$$

B函数可以用 Γ 函数表示出来

$$
\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{22}
$$

Proof $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 时, 使用 Γ 函数的定义 (1). 对于 $\Gamma(p)$, 令 $t=x^2$, 得

$$
\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x
$$

对于 $\Gamma(q)$, 令 $t=y^2$, 得

$$
\Gamma(q)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{q-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}x
$$

所以

$$
\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

积分为 x,y 平面第一象限的面积分. (x,y) 用极坐标表示

$$
\begin{cases}x=r\sin\theta\\ y=r\cos\theta\end{cases}
$$

即得

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(p)\Gamma(q)\\
&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\sin\theta)^{2p-1}(r\cos\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=4\int_0^\infty\mathrm{e}^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\cos^{2q-1}\mathrm{d}\theta\\
&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
$$

□

利用这个关系式可把B函数解析延拓到 p 和 q 的全平面.

从 B 函数的定义, 可以立即看出对称性

$$
B(p,q)=B(q,p)
$$

现在根据 B 函数和 Γ 函数的关系式 (22) 证明 Γ 函数的互余宗量定理.

Proof 令 $p=z$, $q=1-z$

$$
B(z,1-z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}=\Gamma(z)\Gamma(1-z)
$$

当 $\mathrm{Re}z>0$, $\mathrm{Re}(1-z)>0$, 即 $1>\mathrm{Re}z>0$ 时, 由 B 函数的积分定义式

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t
$$

令 $x=\dfrac{t}{1-t}$, 则 $(1+x)(1-t)=1$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}=\dfrac{\mathrm{d}t}{1-t}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z)&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\\
&=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{\sin\pi z}
\end{aligned}
$$

所以在 $0<\mathrm{Re}z<1$ 时, 互余宗量定理成立. 但等式两端在全平面 ($z\neq$ 整数) 都解析, 由解析函数的唯一性定理, 互余宗量定理在全平面均成立. □

Γ 函数倍乘公式的另一证明 考虑积分

$$
\int_{-1}^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{Re}z>0
$$

令 $x^2=t$, 得

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x&=\int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t\\
&=B\left(z,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}
\end{aligned}
$$

若作变换 $1+x=2t$, $1-x=2(1-t)$, 则有另一种形式的结果:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x &= 2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t\\ &= 2^{2z-1}B(z,z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)} = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

即

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

□