

5 解析函数的局域性展开

5.1 解析函数的Taylor展开

前面看到, 一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数. 相反地, 可以将一个解析函数表示成为幂级数.

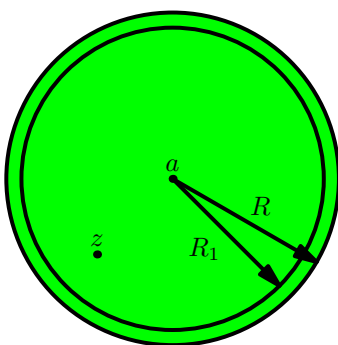
Theorem 5.1 (Taylor展开) 设函数 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆内 $|z - a| < R$ 解析, 则对圆内任何 z 点, $|z - a| < R$, $f(z)$ 可用幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad (1)$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (2)$$

Taylor 展开



Proof 对于圆内任意一点 z , $|z - a| < R$, 总可以以 a 为圆心作一个较小的圆, 把 z 包围在圆内

$$\exists R_1 : |z - a| < R_1 < R$$

根据 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\xi - a}} \\ &= \frac{1}{\xi - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

对于圆上 ξ , $|\xi - a| = R_1$, 所以

$$\left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| = \frac{|z - a|}{R_1} < 1$$

由 M 判别法, 函数级数 (ξ 为自变量!) 在圆上一致收敛. 可逐项积分, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \oint_{|\xi - a| = R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

利用高阶导数公式

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

□

1. 这里 Taylor 展开的形式和实变函数中的 Taylor 公式相同, 但是条件不同.

- 在实变函数中, $f(x)$ 的任何阶导数存在, 还不能保证 Taylor 级数收敛 (Taylor 公式的余项 $\rightarrow 0$).
- 在复变函数中, 解析的要求就足以保证 Taylor 级数收敛.

2. Taylor 展开的唯一性

如果在 a 点的某个邻域内, 按不同的方法得到 $f(z)$ 的一个幂级数表示

$$f(z) = a'_0 + a'_1(z-a) + a'_2(z-a)^2 + \cdots + a'_n(z-a)^n + \cdots$$

系数 a'_n 会不会与 a_n 不同?

为此, 对上式求 n 次导, 令 $z = a$, 可得¹

$$a'_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n$$

∴ 不论用什么方法, Taylor 展开式是唯一的.

5.2 Taylor 级数求法举例

基本初等函数的 Taylor 展开式

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty \quad (3)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad |z| < \infty \quad (4)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad |z| < \infty \quad (5)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1 \quad (6)$$

对于其它函数, 利用这些已知结果, 可使计算简化.

Example 5.1

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1$$

1. 有理函数化成部分分式
2. 求导和积分
3. 级数相乘法
4. 待定系数法

¹ 因为存在 a 的闭邻域, 在此闭邻域内幂级数都一致收敛, 所以交换求和和求导次序合法.

有理函数化成部分分式

Example 5.2

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \frac{1}{(1-z)(1-2z)} \\ &= -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1)z^n \quad |z| < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

求导和积分

Example 5.3 (求导例) 有理函数化部分分式时, 可能遇到

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad |z| < 1\end{aligned}$$

积分例: 见下面多值函数例子.

级数相乘法

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-2z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^{k+l}\end{aligned}$$

令 $k+l=n$, 则由

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \dots \quad (7)$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n 2^l z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) z^n\end{aligned}$$

这个例子不很恰当, 显然部分分式法更简单.

待定系数法

Example 5.4 (Bernoulli 数) 讨论函数

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad (8)$$

定义 $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, 则函数在 $|z| < 2\pi$ 范围内解析.

Solution 设其展开式为

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (9)$$

B_n 称为Bernoulli数.

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l$$

两边除以 z

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} z^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!(l+1)!} z^{k+l} \end{aligned}$$

令 $n = k + l$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} z^n$$

比较系数

$$\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

$n = 0, B_0 = 1.$

$n = 1, \frac{1}{2!}B_0 + B_1 = 0, B_1 = -\frac{1}{2}.$

因为

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1 \right) = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} - \frac{z}{2}$$

第一项为 z 的偶函数, 展开时只有 z 的偶数幂. 于是

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (11)$$

即 $B_{2n+1} = 0 (n > 0)$. 递推关系改写为

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{B_{2k}}{(2k)!(n-2k+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{2} \frac{1}{n!} = 0 \quad (12)$$

即

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{B_{2k}}{(2k)!(n-2k+1)!} = \frac{n-1}{2(n+1)!} \quad (13)$$

$n = 2, \frac{1}{2}B_2 = \frac{1}{12}, B_2 = \frac{1}{6}.$

$n = 4, \frac{1}{12}B_2 + \frac{1}{24}B_4 = \frac{1}{80}, B_4 = -\frac{1}{30}.$

...

□

利用 Bernoulli 数可求 $\tan z$ 和 $\cot z$ 的幂级数展开

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2} &= i \frac{z}{2} \frac{e^{iz/2} + e^{-iz/2}}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}} \\ &= i \frac{z}{2} + \frac{iz}{e^{iz} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \end{aligned} \quad (14)$$

而

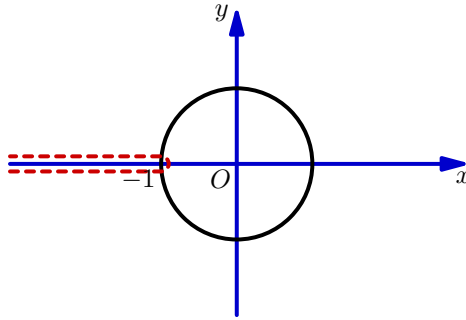
$$\begin{aligned} \frac{z}{2} \tan \frac{z}{2} &= \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2} - z \cot z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} - 1}{(2n)!} B_{2n} z^{2n} \end{aligned} \quad (15)$$

多值函数的 Taylor 展开

多值函数在规好单值分枝后, 在其解析区域即可作 Taylor 展开.

Example 5.5 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 点邻域作 Taylor 展开.

Solution 首先作割线如图, 并规定好单值分枝.



采用积分方法, 因为

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

积分, 在对数函数的解析区域内

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{1}{1+z} &= \ln(1+z)|_{z=0}^z \\ &= \ln(1+z) - \ln(1+z)|_{z=0} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \ln(1+z)|_{z=0} + \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz \\ &= \ln(1+z)|_{z=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \\ &= \ln(1+z)|_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \\ & \quad |z| < 1 \end{aligned} \quad (16)$$

□

Note 多值函数 $\ln(1+z)$ 的 Taylor 展开式只与展开中心的函数值规定有关, 收敛半径只与枝点有关, 不依赖于割线的作法.

Example 5.6

$$(1+z)^\alpha \equiv e^{\alpha \ln(1+z)}$$

在 $z=0$ 作 Taylor 展开.

Solution 仍然如上例割线, 并规定单值分支. 求导

$$[(1+z)^\alpha]' = \frac{\alpha}{1+z} e^{\alpha \ln(1+z)} = \frac{\alpha}{1+z} (1+z)^\alpha$$

采用待定系数法, 设

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

则

$$(1+z) \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - n) c_n z^n$$

比较系数

$$(n+1)c_{n+1} = (\alpha - n)c_n$$

于是

$$c_0 = f(0) = (1+z)^\alpha|_{z=0}$$

$$c_1 = \alpha c_0$$

$$c_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} c_0$$

...

一般地, 可得

$$c_n = \binom{\alpha}{n} c_0$$

这里引入普遍二项式系数

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (17)$$

则

$$(1+z)^\alpha = (1+z)^\alpha|_{z=0} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (18)$$

□

常用函数的 Taylor 级数

函数	$z = 0$ 点的 Taylor 展开	收敛范围
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$ z < \infty$
$\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	$ z < \infty$
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$	$ z < \infty$
$\ln(1+z)$ (主值)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$	$ z < 1$
$(1+z)^\alpha$ (主值)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$	$ z < 1$

5.3 解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性

零点 如果 $f(z)$ 在 a 点解析, $f(a) = 0$, 则称 $z = a$ 为 $f(z)$ 的零点.

若 $f(z)$ 在 $z = a$ 点解析, 则存在邻域 $|z - a| < R$, 函数在邻域解析, 展开为 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

由 $f(a) = 0$, 得 $a_0 = 0$. 设 a_m 为不为零的最低阶系数 (m 最小), 即满足

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0 (m > 0) \quad (19)$$

称 $z = a$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

这时

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - a)^n \\ &= (z - a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - a)^{n-m} \\ &= (z - a)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - a)^n = (z - a)^m \phi(z) \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - a)^n$$

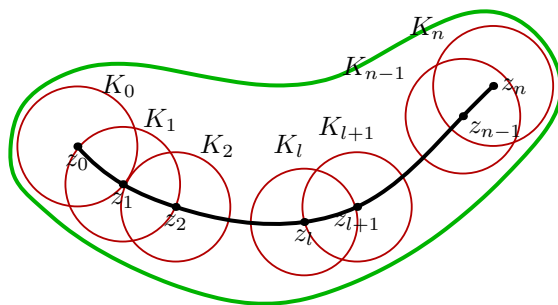
在邻域 $|z - a| < R$ 内解析, 且 $\phi(a) = a_m \neq 0$.

若 m 不存在, 或 $m = \infty$, 即 Taylor 展开所有系数 $a_n = 0$, 则 $f(z) \equiv 0$ 在圆盘 $|z - a| < R$ 内成立.

Lemma 5.2 设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析, 若 $f(z)$ 在 G 内的一个圆盘内恒等于零, 那么 $f(z)$ 在区域 G 内恒等于零.

Proof 设在 a 为中心的一个圆盘 $K_0: |z - a| < R$ 内, $f(z) \equiv 0$. 对于 G 内任意一点 b , 用在 G 内的折线 L 连接 a 和 b . 设 d 为折线到 G 的边界的最短距离. 在 L 上依次取 $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b$, 使

$|z_1 - a| < R$, 而其它任意相邻两点的距离小于 d , $|z_j - z_{j-1}| < d, j = 2, 3, \dots, n$.



作每一点 z_j 的 d -邻域 $K_j: |z - z_j| < d, j = 1, 2, 3, \dots, n-1$. 显然, 当 $j < n$ 时, $z_{j+1} \in K_j \subset G$.

由于 $f(z)$ 在 K_0 内恒等于零, $z_1 \in K_0, f^{(n)}(z_1) = 0, n = 0, 1, 2, 3, \dots$. 于是 $f(z)$ 在 K_1 内 Taylor 展开式的系数都是零, 从而 $f(z)$ 在 K_1 内恒等于零. 一般地, 已经证明了 $f(z)$ 在 K_j 内恒等于零, 就可推出它在 K_{j+1} 内恒等于零. 最后得到它在 K_{n-1} 内恒等于零, 于是 $f(b) = 0$. \square

Theorem 5.3 (零点的孤立性定理) 设 $f(z)$ 在区域 G 内解析且不恒等于零, a 为其零点. 则必能找到 a 的邻域 $|z - a| < \rho$, 使在此邻域内 $z = a$ 是 $f(z)$ 的唯一零点.

Proof 将函数在 a 的某个邻域 $|z - a| < R$ 作 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

则 $a_0 = 0$. 但不能所有 $a_n = 0$, 否则函数在邻域内恒为零, 由引理函数在整个区域内恒为零, 与假设矛盾. 设 m 为最低阶不为零的系数, 即 a 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则在 $|z - a| < R$ 内

$$f(z) = (z - a)^m \phi(z)$$

$\phi(z)$ 解析且 $\phi(a) \neq 0$. 由函数在 a 点解析, $\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0$, 使当 $|z - a| < \rho$ 时, 恒有 $|\phi(z) - \phi(a)| < \epsilon$. 不妨取 $\epsilon = |\phi(a)|/2$, 则

$$|\phi(z)| > |\phi(a)| - \epsilon = \frac{1}{2} |\phi(a)| > 0$$

在邻域 $|z - a| < \rho$ 内成立. \square

Corollary 5.4 设 $f(z)$ 在区域 G 内解析. 若在 G 内存在 $f(z)$ 的无穷多个零点 $\{z_n\}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in G$$

则 $f(z)$ 在 G 内恒为零.

Proof 因 $f(z)$ 在 $z = a$ 点连续

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

所以

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$$

a 为函数零点.

若函数不恒为零, 则由零点的孤立性定理, 存在 a 的某个邻域, 在此邻域 a 为其唯一零点. 但由假设, 在 a 的任意邻域内都有无穷多个零点, 矛盾. \square

Theorem 5.5 (解析函数的唯一性定理) 设在区域 G 内有两个解析函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$, 在 G 内存在无穷多个点 $\{z_n\}, f_1(z_n) = f_2(z_n)$. 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in G$$

则在 G 内 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Proof 考虑 $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 有上面推论得 $g(z) \equiv 0$, 即 $f_1(z) \equiv f_2(z)$. □

Example 5.7 是否存在在原点解析的函数 $f(z)$ 满足下列条件

1. $f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0, f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$

2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$

其中 $n = 1, 2, 3, \dots$

Solution 1. 先设命题成立, 存在在原点解析的解析函数 $f(z)$ 满足条件. 则存在原点的邻域, 函数在邻域解析. 先构造满足第二个条件的解析函数. $f(z) = z$ 满足第二条件. 序列 $a_n = \frac{1}{2n}$ 的极限为 0, 由解析函数的唯一性定理, 在原点邻域内 $f(z) = z$ 为满足条件二的唯一解析函数. 但

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2n-1} \neq 0$$

\therefore 函数不存在.

2. 改写

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

可见 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 满足条件.

在 0 的邻域内, 序列 $\{\frac{1}{n}\}$ 的极限存在, 可见在 0 的任一邻域内 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 为满足条件的唯一解析函数. □

Example 5.8 在复平面上解析, 在实轴上等于 $\sin x$ 的函数, 只能是 $\sin z$.

Solution 由定义

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

在全平面上收敛, 解析. 在实轴上

$$\sin z|_{z=x} = \sin x$$

设有另一函数 $f(z)$ 也满足条件. 取点序列 $z_n = \frac{1}{n}$, 则由

$$\sin z_n = \sin \frac{1}{n} = f(z_n)$$

$\therefore \sin z = f(z)$ □

5.4 解析函数的 Laurent 展开

解析函数在解析点可展开成 Taylor 级数. 有时, 还需要将它奇点附近展开成幂级数, 这时就得到 Laurent 展开.

Theorem 5.6 (Laurent 展开) 设函数 $f(z)$ 在以 b 为圆心的环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 中单值解析, 则对于环域内的任何 z 点, $f(z)$ 可以用包括负幂项的幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad R_1 < |z-b| < R_2 \quad (21)$$

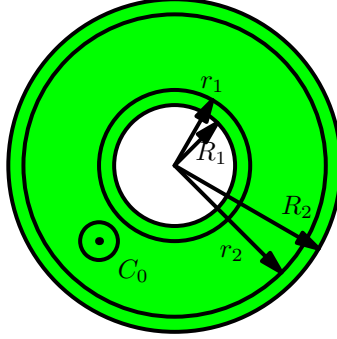
其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi \quad (22)$$

C 是环域内绕内圆一周的任意一条曲线.

Proof 对于环域内任意一点 z , 存在 r_1 和 r_2 满足

$$R_1 < r_1 < |z - b| < r_2 < R_2$$



即 z 位于环域内两圆 $|z - b| = r_1$ 和 $|z - b| = r_2$ 之间. 再在环域 $r_1 < |z - b| < r_2$ 内取 z 的一个邻域, 设 C_0 为邻域的边界. 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

又由复连通 Cauchy 定理

$$\oint_{|\xi - b| = r_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_{|\xi - b| = r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \oint_{C_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

于是

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - b| = r_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - b| = r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

对于 $|\xi - b| = r_2$, 因为 $|z - b| < r_2$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - b) - (z - b)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - b)^n}{(\xi - b)^{n+1}}$$

对于 $|\xi - b| = r_1$, 因为 $|z - b| > r_1$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - b) - (z - b)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - b)^n}{(z - b)^{n+1}}$$

代入, 得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - b)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - b| = r_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{n+1}} d\xi \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (z - b)^{-n-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - b| = r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{-n}} d\xi \end{aligned}$$

由复连通区域 Cauchy 定理, 因为在环域 $R_1 < |z - b| < R_2$ 内各个被积函数解析, 故积分围道 $|\xi - b| = r_2$ 和 $|\xi - b| = r_1$ 都可换成环域内绕内圆的任意一条简单闭合曲线. 将两求和并后得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z - b)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - b)^n \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

□

1. 收敛范围为一环形区域.

Laurent 展开 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots$ 即有正幂项, 又有负幂项.

(a) 正幂项 $\sum_{n=0}^{\infty} \dots$ 称为 Laurent 级数的**正则部分**, 其收敛范围为收敛圆 $|z - b| < R_2$, 正幂项在 $|z - b| < R_2$ 圆内绝对收敛. 在圆内每一个闭圆盘内一致收敛.

(b) 负幂项 $\sum_{n=-\infty}^{-1} \dots$ 称为 Laurent 级数的**主要部分**, 其收敛范围 $\left| \frac{1}{z - b} \right| < \frac{1}{R_1}$ 为圆外 $|z - b| > R_1$, 负幂项在圆外 $|z - b| > R_1$ 绝对收敛, 在圆外任意一个闭圆盘中一致收敛.

两部分合起来, 就构成了 Laurent 级数. 收敛范围为环域 $R_1 < |z - b| < R_2$, 正则部分决定其外圆半径, 主要部分决定其内圆半径. 整个 Laurent 级数在环域 $R_1 < |z - b| < R_2$ 内绝对收敛, 在环域内任意一个闭圆盘中一致收敛.

2. Laurent 展开与 Taylor 展开不同, 其展开区域 (收敛范围) 不同. 注意即使是正幂项系数

$$a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)$$

3. Laurent 展开的唯一性.

设函数在环域 $R_1 < |z - b| < R_2$ 内还有另一个 Laurent 展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n (z - b)^n$$

两边同乘以 $(z - b)^{-k-1}$

$$(z - b)^{-k-1} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n (z - b)^{n-k-1}$$

沿环域内绕内圆一周的任一围道 C 积分²

$$\begin{aligned} \oint_C (z - b)^{-k-1} f(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n \oint_C (z - b)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n 2\pi i \delta_{nk} \\ &= 2\pi i a'_k \end{aligned}$$

所以

$$a'_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - b)^{k+1}} dz = a_k$$

即 Laurent 展开是唯一的.

5.5 Laurent 级数求法举例

方法同 Taylor 级数求法, 包括部分分式法, 求导或积分, 级数相乘, 待定系数等.

Example 5.9 求 $\frac{1}{z(z-1)}$ 在 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 区域内的幂级数展开.

²因为在围道上 Laurent 级数一致收敛, 可交换积分和求和次序.

Solution 区域为环形区域, 展开为 Laurent 展开.

当 $0 < |z| < 1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\end{aligned}$$

当 $|z| > 1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n\end{aligned}$$

□

另解 部分分式法

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

当 $0 < |z| < 1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\end{aligned}$$

当 $|z| > 1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n\end{aligned}$$

□

Example 5.10 求 $\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\}$ 在 $0 < |t| < \infty$ 内的幂级数展开.

Solution 用级数乘法.

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = e^{zt/2} e^{-z/2t}$$

在 $0 < |t| < \infty$ 内, $e^{zt/2}$ 展成 Taylor 级数

$$e^{zt/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k t^k$$

$e^{-z/2t}$ 展成 Laurent 级数

$$e^{-z/2t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^l \left(\frac{1}{t}\right)^l$$

相乘则为 Laurent 级数

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+l} t^{k-l}$$

令 $k-l=n$, $k=n+l$, 由

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \cdots + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{l=-n}^{\infty} \cdots \quad (23)$$

\therefore

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(n+l)!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} t^n \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{l=-n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(n+l)!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \end{aligned} \quad (24)$$

$J_n(z)$ 为 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(z) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} & n \geq 0 \\ \sum_{l=-n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} & n < 0 \end{cases} \quad (25)$$

□

5.6 解析函数的孤立奇点

孤立奇点 设 b 为函数 $f(z)$ 的一个奇点. 如果存在 b 的空心邻域, 在该邻域内 $0 < |z-b| < r$, $f(z)$ 解析, 则称 b 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 否则称为非孤立奇点.

Example 5.11 函数 $\frac{1}{\sin(1/z)}$

Solution 显然, $z=0$ 为奇点. $1/z = n\pi$, $z = \frac{1}{n\pi}$ 也是奇点.

$z = \frac{1}{n\pi}$ 为函数的孤立奇点. 而在 $z=0$ 的任意邻域, 总有无穷多个奇点, 故 $z=0$ 是非孤立奇点. □

孤立奇点分类

如果 $z=b$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则存在一个环域 $0 < |z-b| < R$, 在环域内 $f(z)$ 解析, 可以展开成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad (26)$$

可能出现三种情况:

1. 级数展开式不含负幂项. b 点称为 $f(z)$ 的可去奇点.
2. 级数展开式只含有有限个负幂项. b 称为 $f(z)$ 的极点.
3. 级数展开式含有无穷多个负幂项. b 称为 $f(z)$ 的本性奇点.

可去奇点

级数展开式不含负幂项, $a_n = 0 (n < 0)$.
这时级数退化为 Taylor 级数, 上式可写成

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

右边级数的收敛区域为收敛圆, 级数在收敛圆内解析. 如果定义或重新定义函数 $f(z)$ 在 b 点的值为级数在 b 点的值

$$f(b) = a_0$$

则 b 不再是 $f(z)$ 的奇点, 故奇点称为可去奇点.

重新定义的 $f(z)$ 为

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq b \\ a_0 = \lim_{z \rightarrow b} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = \lim_{z \rightarrow b} f(z) & z = b \end{cases} \quad (27)$$

上式用到了级数在 b 点的连续性. 下面的定理告诉我们哪些奇点是可去奇点.

Theorem 5.7 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-b| < R$ 解析, b 是函数的可去奇点的充要条件为, 存在极限 $\lim_{z \rightarrow b} f(z)$.

Proof 只需证明必要性. 在 $0 < |z-b| < R$ 内, $f(z)$ 展成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

由极限存在, 存在复数 A , $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |z-b| < \delta, |f(z) - A| < \epsilon$. 于是得

$$|f(z)| < |A| + \epsilon = M$$

即函数有界. 取 $\rho < \delta$, 估算 Laurent 级数系数如下

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-b|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi \\ &< \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n} \end{aligned}$$

当 $n < 0$ 时, 令 $\rho \rightarrow 0$, 得 $a_n = 0$, 即 b 为可去奇点. □

或

Theorem 5.8 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-b| < R$ 解析, b 是函数的可去奇点的充要条件为, 存在 b 的空心邻域 $0 < |z-b| < \delta$, 函数在此邻域内有界 $|f(z)| < M$.

极点

级数展开式只含有有限个复幂项, $\exists m > 0, a_n = 0 (n < -m)$.

进一步, 若 $a_{-m} \neq 0$, 即 a_{-m} 为最小的不为零系数, b 称为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

这时

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-b)^n \\ &= (z-b)^{-m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-b)^{n+m} \\ &= (z-b)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-b)^n \\ &= (z-b)^{-m} \phi(z) \end{aligned}$$

其中

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-b)^n$$

为 $|z-b| < R$ 内的解析函数, 且 $\phi(b) \neq 0$. 这时, $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = \infty$, 函数在极点附近趋于无穷.

Theorem 5.9 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-b| < R$ 内解析, b 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是

$$\lim_{z \rightarrow b} f(z) = \infty$$

即 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |z-b| < \delta$ 时, $|f(z)| > M$.

Proof 由定义, $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = \infty$ 即 $\lim_{z \rightarrow b} \frac{1}{f(z)} = 0$.

再任取 $M > 0, \exists \delta, 0 < |z-b| < \delta$ 时, $|f(z)| > M$. 即在 $|z-b| < \delta$ 内, $f(z) \neq 0$, 所以 $\frac{1}{f(z)}$ 在此邻域内解析 (包括 b 点, b 点为可去奇点). 进一步, b 为其零点 (且为孤立零点), 设其为 m 阶零点. 则

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m g(z) \quad g(b) \neq 0$$

即

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-b)^{-m} \frac{1}{g(z)} = (z-b)^{-m} \phi(z) \\ \phi(b) &= \frac{1}{g(b)} \neq 0 \end{aligned}$$

b 为函数 m 阶极点. □

本性奇点

级数展开式含有无穷多个负幂项.

对于本性奇点, $\lim_{z \rightarrow b} f(z)$ 不存在 (既不能有界, 也不能无穷). 可以证明

Theorem 5.10 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-b| < R$ 内解析, b 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是: 对于任何复数 A , 总可以找到一个序列 $z_n \rightarrow b$, 使得 $f(z_n) \rightarrow A$.

Proof 只需证充分性. 不然, 则可给出 $A, \epsilon_0 > 0$ 与 $\delta_0 > 0$, 使 $|f(z) - A| \geq \epsilon_0$ 对于 $0 < |z - z_0| < \delta_0$ 上的一切 z 成立. 那么,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

在 $0 < |z - z_0| < \delta_0$ 上是正则的且是有界的,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon_0}$$

所以, z_0 为 $g(z)$ 的可去奇点. $g(z)$ 的 Laurent 展开为

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

z_0 最多为 $g(z)$ 的 m 阶零点³

$$g(z) = (z-z_0)^m h(z) \quad h(z) \neq 0$$

所以

$$f(z) = A + \frac{1}{g(z)} = A + \frac{1}{h(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^m}$$

z_0 最多为 $f(z)$ 的 m 阶极点. 矛盾. □

Example 5.12 考虑函数

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

Solution $z=0$ 为其本性奇点. z 沿正实轴 $\rightarrow 0$, $e^{1/z} \rightarrow \infty$ z 沿负实轴 $\rightarrow 0$, $e^{1/z} \rightarrow 0$ z 沿虚轴 $\rightarrow 0$, $e^{1/z}$ 不趋于一个确定的数: 若 $z_n = \frac{i}{2n\pi}$, $e^{1/z_n} = 1 \rightarrow 1$ 若 $z_n = \frac{i}{(2n+1)\pi}$, $e^{1/z_n} = -1 \rightarrow -1$ □

5.7 解析延拓

解析延拓

设函数 $f_1(z)$ 在区域 G_1 内解析, 函数 $f_2(z)$ 在区域 G_2 内解析. 而在 G_1 和 G_2 的公共区域 $G_1 \cap G_2 (\neq \emptyset)$ 内, $f_1(z) \equiv f_2(z)$, 则可在区域 $G_1 \cup G_2$ 内定义函数 $f(z)$

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1 \\ f_2(z) & z \in G_2 \end{cases}$$

$f(z)$ 在区域 $G_1 \cup G_2$ 内每一点都单值解析, 所以 $f(z)$ 为 $G_1 \cup G_2$ 内的解析函数. 这样函数 $f_1(z)$ 或 $f_2(z)$ 的解析范围被扩展了.

我们称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 G_2 内的**解析延拓**; 反之, $f_1(z)$ 是 $f_2(z)$ 在 G_1 内的**解析延拓**. $f(z)$ 则称为 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在更大区域 $G_1 \cup G_2$ 内的**解析延拓**.

Example 5.13 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

在以 $z=0$ 为圆心的单位圆 $|z| < 1$ 内收敛, 代表一个解析函数. 又在 $|z| < 1$ 内

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

而函数 $\frac{1}{1-z}$ 在更大的区域: 全平面除去奇点 $z=1$ 解析. 函数 $\frac{1}{1-z}$ 即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在除去 $z=1$ 的全平面的解析延拓.

³ 按 $g(z)$ 的定义, 在 $0 < |z-z_0| < \delta_0$ 上 $g(z) \neq 0$.

解析延拓和奇点

函数在一点 z_1 解析的必要与充分条件是: 它在 z_1 的某一邻域内有幂级数展开. 因此要将函数从 z_1 附近向外延拓, 只要研究它的幂级数展开式是否能延拓.

求出幂级数的和函数的有限表达式, 当然是理想的解析延拓的方法. 但在许多问题中, 往往难以求出函数的有限表达式. 这时可以用幂级数来延拓幂级数.

设在 z_1 点解析函数的幂级数展开式为

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z - z_1)^n$$

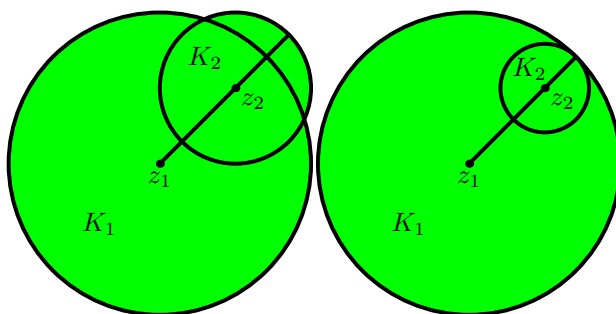
设其收敛圆为 $K_1: |z - z_1| < r_1$. 在 K_1 内任取一点 $z_2 \neq z_1$, $f_1(z)$ 在 z_2 点的幂级数展开式为

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(z - z_2)^n$$

其中

$$a_n^{(2)} = \frac{f_1^{(n)}(z_2)}{n!}$$

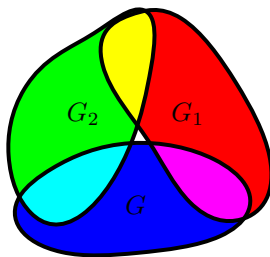
设幂级数 $f_2(z)$ 的收敛圆为 $K_2: |z - z_2| < r_2$. 显然, $r_2 \geq r_1 - |z_1 - z_2|$.



1. 如果 $r_2 > r_1 - |z_1 - z_2|$. 那么, $f_1(z)$ 就由 z_1 从 z_2 的方向延拓到 K_1 圆外.
2. 如果 $r_2 = r_1 - |z_1 - z_2|$. 那么, 圆 K_1 与 K_2 相切. 相应的切点一定是奇点: 无论如何延拓, 函数在此点都不可能解析. 可能是极点、本性奇点以及枝点、非孤立奇点.

解析延拓与多值函数

解析延拓非常重要, 因为它能将一个解析函数的定义域尽可能地扩大. 但是, 解析延拓时, 可能发生如下的现象:



如图, 设 f 在 G 上解析, 我们将它解析延拓到 G_1 上的解析函数 f_1 . f_1 又可解析延拓到 G_2 上的解析函数 f_2 . 设 G_2 与 G 相交, 则 f 与 f_2 在 $G \cap G_2$ 上不一定相等! 这样, 解析延拓的结果可能为多值函数.

所以, 若 z_1 为奇点, 我们可以绕它一圈做解析延拓. 这时可能出现两种情况:

1. 若在 $G \cap G_2$ 上 $f(z) = f_2(z)$, 则函数可解析延拓到绕 z_1 点的环域. z_1 为函数的极点或本性奇点.
2. 若在 $G \cap G_2$ 上 $f(z) \neq f_2(z)$, 则函数不可解析延拓到绕 z_1 点的环域. 函数为多值函数. 化为单值函数, 环域内必存在不解析的割线. z_1 为函数的枝点.

全局解析函数

解析函数经常先定义在一个小的区域, 然后通过解析延拓推广到整个复平面 (Riemann 面). 在解析延拓的过程中, 自然可以找出函数的奇点: 孤立奇点, 枝点, 非孤立奇点等. 如此定义的解析函数称为全局解析函数.

如果 $f(z)$ 是一个全局解析函数, 则它在复平面 (Riemann 面) 上每一点的值是确定的, 它的奇点及其性质也是确定的.

Taylor 展开的收敛半径与解析函数的奇点

设函数在 a 点展开为 Taylor 级数, 则收敛圆上一定有奇点. 否则, 函数会在更大的收敛圆内解析.

设 b 是 $f(z)$ 离展开中心 a 点最近的奇点, 则 $f(z)$ 在 a 点 Taylor 展开的收敛半径 $R = |b - a|$.

Example 5.14

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

$R = 1$. 在收敛圆上有和函数奇点 $z = \pm i$.

上例若在实数域, 就不好理解为什么和函数在 $(-\infty, \infty)$ 无奇点, 但幂级数展开却只局限在 $R = 1$ 的有限范围. 这也是扩充到复数域上研究函数的好处之一.

Laurent 展开的收敛区域与解析函数的奇点

若外圆半径 $R_2 \neq \infty$, 则函数 $f(z)$ 在外圆上一定有奇点. 同样, 若内圆半径 $R_1 \neq 0$, 函数在内圆上也一定有奇点.

特殊情况 $R_1 = 0$, 若 Laurent 级数主要部分不为零, 则 $z = b$ 为 $|z - b| < R_2$ 内的唯一奇点 (孤立奇点), 若 Laurent 级数主要部分为零, 则函数在 $|z - b| < R_2$ 内解析, $z = b$ 为可去奇点.

Note 一个全局解析函数可能无法定义在整个复平面. 解析延拓能否实现, 取决于函数的奇点分布: 如果在幂级数的收敛圆的边界上“充满”了奇点, 那么函数将无法解析延拓出去.

Example 5.15 见本章习题 10.