4 无穷级数

无穷级数, 特别是幂级数是解析函数的最重要的表达形式之一. 许多初等函数 (例如 e^z) 和特殊函数都是用幂级数定义的.

4.1 复数序列和复数级数

复数序列和级数的许多基本概念和定理, 和高等数学的实数序列和级数相似. 我们不加证明地叙述有关结论.

复数序列

复数序列 按照一定顺序排列的复数 $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ 记为 $\{z_n\}$

$\because z_n = x_n + \mathrm{i}y_n \therefore$ 一个复数序列完全等价于两个实数序列. 复数序列的很多性质和实数序列完全相同. 因为

$$\boxed{\begin{aligned}&|x| < |z|\\ &|y| < |z|\\ &|z| < |x| + |y|\end{aligned}} \tag{1}$$

极限 给定序列 $\{z_n\}$, 如果存在复数 z, $\forall\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, $|z_n - z| < \epsilon$ (即 z_n 属于 z 的 ϵ-邻域). 则称 z_n 收敛于 z, 记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Theorem 4.1 (序列收敛的 Cauchy 充要条件) *序列极限存在 (序列收敛) 的充要条件为 $\forall\epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$, 使得 $\forall$正整数$n > N, m > N$, 有*

$$|z_n - z_m| < \epsilon \tag{2}$$

复数级数

一个复数级数即为一个复数序列的求和.

复数级数 $\{u_n\}$ 为一序列, 则

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

称为复数级数.

部分和 级数的部分和 S_n 为

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

级数和 如果部分和所构成的序列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\sum u_n$ **收敛**, 而序列 $\{S_n\}$ 的极限 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ 称为级数 $\sum u_n$ 的**和**. 否则, 若序列 $\{S_n\}$ 不收敛, 则级数**发散**.

级数的收敛性和它的部分和序列的收敛性完全一致, 因此, 根据序列收敛的充要条件可以写出级数收敛的充要条件.

Theorem 4.2 (级数收敛的 Cauchy 充要条件) *$\forall\epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$, 使得 $\forall$正整数$n > N$ 和 $\forall$正整数p, 有*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon \tag{3}$$

令 $p = 1$, 得到

Theorem 4.3 (级数收敛的必要条件)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{4}$$

绝对收敛

绝对收敛 如果级数 $\sum|u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum u_n$ 绝对收敛.

绝对收敛的级数一定是收敛的, 因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\leq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}| \tag{5}$$

反之, 一个收敛的级数却不一定是绝对收敛的.

绝对收敛级数基本判别法

Theorem 4.4 (比较判别法) *若 $|u_n|<v_n$, 而 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\sum|u_n|$ 收敛 (即 $\sum u_n$ 绝对收敛). 若 $|u_n|>v_n$, 而 $\sum v_n$ 发散, 则 $\sum|u_n|$ 发散 (但 $\sum u_n$ 不一定发散).*

经常用几何级数

$$1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^n+\cdots \qquad \rho>0$$

作为比较级数. 当 $\rho<1$ 时, 几何级数收敛到 $\frac{1}{1-\rho}$. 当 $\rho\geq 1$ 时, 级数发散.

通过与几何级数相比较, 可得如下两个判别法:

Theorem 4.5 (比值判别法) *若存在常数 $\rho<1$ 使得*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leq\rho<1 \tag{6}$$

则级数 $\sum|u_n|$ 收敛. 当

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geq 1 \tag{7}$$

时, 级数 $\sum u_n$ 发散.

Theorem 4.6 (根式判别法) *如果*

$$|u_n|^{\frac{1}{n}}\leq\rho<1 \tag{8}$$

则级数 $\sum|u_n|$ 收敛. 如果

$$|u_n|^{\frac{1}{n}}\geq 1 \tag{9}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

Note *如果*

$$|u_n|>\alpha>0$$

则级数不仅绝对发散, 而且级数本身也发散!

由于级数的前面有限项与整个级数的收敛无关, 判别可从第 N 项开始. 令 $N\to\infty$ 可得:

Theorem 4.7 (d'Alembert (达朗贝尔) 判别法) *如果*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1 \tag{10}$$

则级数 $\sum|u_n|$ 收敛. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1 \tag{11}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

Theorem 4.8 (Cauchy 判别法) 如果
$$\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \tag{12}$$
则级数 $\sum |u_n|$ 收敛. 如果
$$\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \tag{13}$$
则级数 $\sum u_n$ 发散.

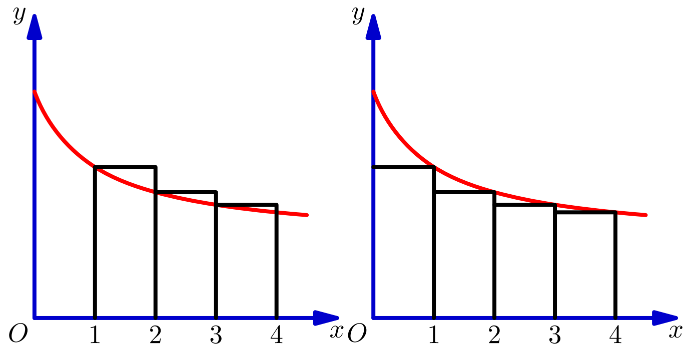
绝对收敛级数性质

1. 改变求和次序. 例如:
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... = u_1 + u_0 + u_3 + u_2 + u_4 + ...$$
2. 拆成几个子级数, 每个子级数仍绝对收敛. 例如:
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}.$$

上面判别法是将级数与几何级数比较得到. 但存在级数比几何级数收敛速度慢, 就不能用上述判别法. 如 $\dfrac{1}{n^p}$ 和 $\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, 它们在 $p > 1$ 时收敛, $p \le 1$ 时发散. 可由下面积分判别法判别.

Theorem 4.9 (积分判别法) 设 $f(x)$ 为一连续, 单调下降的正函数, 使得 $f(n) = a_n$, 则正项级数 $\sum_1^\infty a_n$ 与 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 同为收敛或发散.

Proof 如图



$$\because \quad \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < a_n < \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x$$
$$\therefore \quad \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + a_1$$

□

4.2 二重级数

二重级数 是指排列成

$$\begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{1n} + \cdots \\ + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + \cdots + a_{2n} + \cdots \\ + \ \vdots \ + \ \vdots \ + \ \vdots \ + \ \vdots \ + \ddots + \ \vdots \ + \ddots \\ + a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + a_{m4} + \cdots + a_{mn} + \cdots \\ + \ \vdots \ + \ \vdots \ + \ \vdots \ + \ \vdots \ + \ddots + \ \vdots \ + \ddots \end{array}$$

的方阵, 这个方阵的右端和下端都是无限的. 方阵的每一项用 a_{kl} 表示, 其中第一个指标 k 表示行, 第二个指标 l 表示列.

二重级数求和

方阵的前 m 行 n 列共 $m \times n$ 项构成这个二重级数的**部分和**

$$S_{mn} = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}} a_{kl} \tag{14}$$

如果部分和序列 $\{S_{mn}\}$ 收敛

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} S_{mn} = S \tag{15}$$

即: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $m, n > N$ 时, 恒有

$$|S_{mn} - S| < \epsilon$$

则称此二重级数**收敛**. S 就是这个二重级数之和, 记为

$$S = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \tag{16}$$

除了以上定义的二重级数和外, 还有其它的求和方式. 例如, 考虑部分和 (14), 有

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \right] = \sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} a_{kl} \right] \tag{17}$$

我们可以做如下的**累次求和**

1. 逐行求和: 先按行求和, 再将各行相加

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right] \\ &= \lim_{m \to \infty} \left[\lim_{n \to \infty} S_{mn} \right] = \lim_{m \to \infty} S_{m\infty} \end{aligned} \tag{18}$$

2. 逐列求和: 先按列求和, 再将各列相加

$$\begin{aligned} S'' &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right] \\ &= \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{m \to \infty} S_{mn} \right] = \lim_{n \to \infty} S_{\infty n} \end{aligned} \tag{19}$$

一般地讲, S, S', S'' 三者求和方式不同, 结果也可以不同.

Example 4.1 二重级数

$$a_{kl} = \frac{1}{k+1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^l - \frac{1}{k+2} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^l$$

Solution

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^l - \frac{1}{m+2} \left(\frac{m+1}{m+2} \right)^l \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] - \frac{m+1}{m+2} \left[1 - \left(\frac{m+1}{m+2} \right)^n \right] \end{aligned}$$

累次求和

$$
\begin{aligned}
S' &= \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} S_{mn}\right] = -\frac{1}{2} \\
S'' &= \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} S_{mn}\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

二重级数的和不存在! □

绝对收敛二重级数求和

Theorem 4.10 *如果二重级数为正项级数 $(a_{kl}\geq 0)$, 则若三个求和*

$$
\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}
$$

的任一个收敛, 其余两个也收敛, 并且具有相同的和.

由此

Theorem 4.11 *如果二重级数绝对收敛, 则三个求和*

$$
\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}
$$

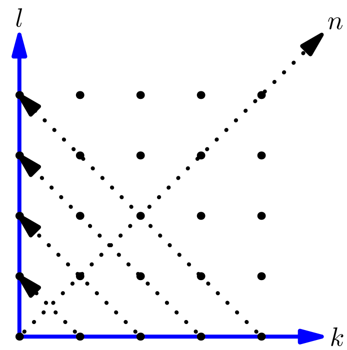
都收敛, 并且具有相同的和.

事实上,

Theorem 4.12 *绝对收敛的二重级数具有可交换性, 即任意改变它的求和次序后, 级数仍收敛, 并与原级数有相同的和.*

据此, 常用的重新排序还有:

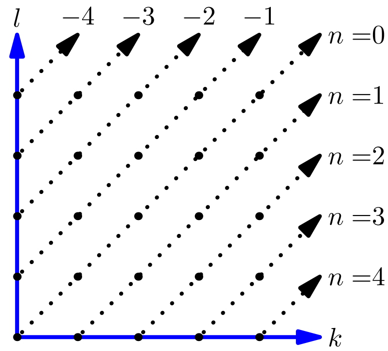
1. 如图,



令 $k+l=n$, 则

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} a_{n-l,l} \tag{20}
$$

2. 如图



令 $k-l=n$, $k=n+l$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{n+l,l}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{l=-n}^{\infty}a_{n+l,l} \tag{21}$$

4.3 函数级数

函数级数 如果级数每一项都为函数

$$u_1(z)+u_2(z)+\cdots+u_n(z)+\cdots$$

则级数称为**函数级数**.

点收敛性 如果对于 G 中一点 z_0, 级数 $\sum u_k(z_0)$ 收敛, 则称函数级数 $\sum u_k(z)$ 在 z_0 点收敛. 反之, 如果 $\sum u_k(z_0)$ 发散, 则称 $\sum u_k(z)$ 在 z_0 点发散.

区域收敛性 如果函数级数 $\sum u_k(z)$ 在区域 G 内每一点都收敛, 则称函数级数在 G 内收敛. 其和为 G 内的单值函数, 记为 $S(z)$.

为了讨论和函数 $S(z)$ 的性质: 连续性, 解析性, ..., 引入一致收敛概念

一致收敛 如果 $\forall\epsilon>0$, $\exists N(\epsilon)$ 与 z 无关. 使当 $n>N(\epsilon)$ 时, $\forall z\in G$,

$$\left|S(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right|<\epsilon \tag{22}$$

则称函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 G 内一致收敛.

闭一致收敛 若函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在区域 G 内的任一闭圆盘中一致收敛, 则称函数级数在 G 内闭一致收敛.

Theorem 4.13 (一致收敛 Cauchy 充要条件) $\forall\epsilon>0$, $\exists N(\epsilon)$ 与 z 无关. 当 $n>N(\epsilon)$ 时, $\forall$正整数p 和 $\forall z\in G$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(z)\right|<\epsilon \tag{23}$$

判断一个级数是否一致收敛, 常用

Theorem 4.14 (Weierstrass (外尔斯特拉斯) M 判别法) 若在区域 G 内 $|u_k(z)|<a_k$, a_k 与 z 无关, 而 $\sum a_k$ 收敛, 则 $\sum u_k(z)$ 在 G 内绝对而且一致收敛.

一致收敛级数, 如果各项为连续函数, 则和函数也为连续函数. 如果各项为解析函数, 则和函数也为解析函数.

Theorem 4.15 (连续性)　如果 $u_k(z)$ 在 G 内连续, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 G 内一致收敛, 则其和函数 $S(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 也在 G 内连续. 这时

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0} u_k(z) \tag{24}$$

即一致收敛级数可以逐项求极限. 或者说, "求极限"与"求级数和"可以交换次序.

Theorem 4.16 (逐项求积分)　设 C 是区域 G 内一条 (分段光滑) 曲线, 如果 $u_k(z)$ 是 C 上的连续函数, 则对于 C 上一致收敛级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u(z)$ 可以逐项求积分

$$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z \tag{25}$$

即一致收敛级数, "求积分"与"求级数和"可以交换次序.

Theorem 4.17 (Weierstrass定理 (逐项求导数))　设 $u_k(z)$ 在 G 中解析, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 G 内闭一致收敛, 则

1. 级数之和 $S(z)$ 是 G 内的解析函数.
2. $S(z)$ 的各阶导数可以由 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 逐项求导得到

$$S^{(p)}(z)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right)^{(p)}=\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \tag{26}$$

3. 求导后的级数在 G 内闭一致收敛.

Weierstrass 定理的证明

1. 任取 G 内一点 z_0, 则有一邻域 $|z-z_0|\le r$ 属于 G. 注意到邻域也是单连通区域, 考虑任一围道积分, 因为 $|z-z_0|\le r$ 内一致收敛

$$\oint f(z)\mathrm{d}z=\oint\sum u_k(z)\mathrm{d}z$$

逐项求积分

$$=\sum\oint u_k(z)\mathrm{d}z=0$$

由Morera定理, $f(z)$ 在邻域内解析. 所以 $f(z)$ 在 z_0 点解析.

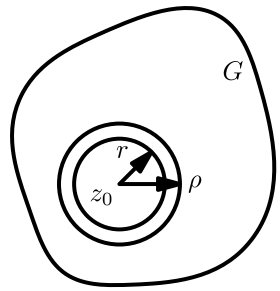
2. 仍然任取 G 内一点 z_0, 有一邻域 $|z-z_0|\le r$ 属于 G. 选择积分围道为 $|z-z_0|=r$, 由解析函数的高阶导数公式

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z_0)&=\frac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}\mathrm{d}z\\ &=\frac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)}{(z-z_0)^{p+1}}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

再次交换积分和求和次序

$$\begin{aligned} &=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{p+1}}\mathrm{d}z\\ &=\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \end{aligned}$$

3. 对于任意闭圆盘 $\{|z-z_0|\le r\}\subset G$, 存在一个更大的圆 $\{|z-z_0|=\rho\}\subset G$. 则闭圆盘到大圆的最短距离为 $\delta=\rho-r$.



考虑余项和

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} u_k^{(p)}(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{u_k(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}}\mathrm{d}\xi\right|$$
$$= \left|\frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\xi-z_0|=\rho} \sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{u_k(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}}\mathrm{d}\xi\right|$$
$$\le \frac{p!}{2\pi} \oint_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(\xi)\right|}{|\xi-z|^{p+1}}|\mathrm{d}\xi|$$

$(\because |\xi-z|\ge\delta)$

$$\le \frac{p!}{2\pi\delta^{p+1}} \oint_{|\xi-z_0|=\rho} \left|\sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(\xi)\right| |\mathrm{d}\xi|$$

由 $\sum u_k(z)$ 在闭圆盘 $|z-z_0|\le\rho$ 上一致收敛, 可得
$\forall\epsilon>0,\ \exists N(\epsilon)>0$, 当 $n>N(\epsilon)$ 时

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(\xi)\right| < \epsilon$$

于是

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} u_k^{(p)}(z)\right| < \frac{p!}{2\pi\delta^{p+1}}\epsilon\cdot 2\pi\rho = \epsilon'$$

即: 总可选取与 z 无关的 N, 当 $n>N$ 时, 对 $z\in\{|z-z_0|\le\rho\}$, 余项小于任何给定的小数. 此即一致收敛.

□

4.4 幂级数

幂级数 通项为幂函数的函数级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \tag{27}$$

这种特殊形式的函数级数是最基本, 最常用的一种函数级数. 我们先只讨论不含负幂次项的幂级数. 下一章还将讨论含有负幂次项的幂级数.

幂级数的收敛性

Theorem 4.18 (Abel (第一) 定理) *如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z_0 收敛, 则在以 a 点为圆心, $|z_0-a|$ 为半径的圆内 $|z-a|<|z_0-a|$ 绝对收敛, 而在 $|z-a|\le r<|z_0-a|$ 的闭圆内一致收敛.*

Proof 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ 收敛, 故满足必要条件

$$\lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

$\therefore$ 存在正数 q, 使 $|c_n(z_0-a)^n|<q$.

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n|\cdot\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n < q\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

当 $\left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right|<1$ 时, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$ 收敛, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $|z-a|<|z_0-a|$ 圆内绝对收敛.

当 $|z-a|\le r<|z_0-a|$ 时

$$|c_n(z-a)^n| < q\left|\frac{r}{z_0-a}\right|^n$$

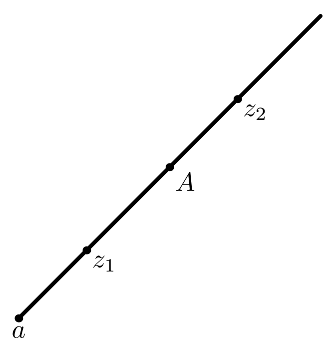
常数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r}{z_0-a}\right|^n$ 收敛, 故由 M 判别法 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $|z-a|\le r<|z_0-a|$ 的闭圆内一致收敛. □

Corollary 4.19 *若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z_1 发散, 则在圆外 $|z-a|>|z_1-a|$ 处处发散.*

Proof 采用反证法. 如若不然, 在 $|z-a|>|z_1-a|$ 圆外某点 z_2 收敛. 则按Abel (第一) 定理, 级数在 $|z-a|<|z_2-a|$ 圆内收敛, 也就在 z_1 点收敛, 矛盾. □

收敛圆

考虑从 a 点到无穷远的一条直线.



在直线上幂级数的收敛性有三种可能情形.

1. 除了在 $z=a$ 点级数成为常数 c_0 外, 在直线上所有其它点级数都发散. 根据推论, 级数在全平面上, 除 a 点外, 处处发散.
2. 在直线上所有点级数都收敛. 根据 Abel 定理, 幂级数在全平面上处处收敛.
3. 在直线上有些点级数收敛, 在另一些点级数发散. 根据 Abel 定理及其推论, 存在一点 A, 把直线分为两部分, 在从 a 到 A 的一段上级数处处收敛, 在从 A 到 ∞ 的一段上级数处处发散, 在 A 点, 级数可能收敛, 也可能发散. 令 $\overline{aA}=R$. 于是, 按 Abel 定理及推论, 以 a 为圆心, 在半径为 R 的圆内, 级数收敛, 圆外级数发散, 在圆上级数可能在某些点收敛, 而在另一些点发散. 这圆称为**收敛圆**, 它的半径称为**收敛半径**.

收敛圆 存在一个圆，圆内 $|z-a|<R$ 级数收敛，圆外 $|z-a|>R$ 级数发散．这个圆称为收敛圆．

收敛半径 收敛圆的半径 R 称为收敛半径．

作为特殊情况, $R=0$ 则除 $z=a$ 点外, 幂级数在全平面处处发散; $R=\infty$ 则幂级数在全平面收敛.

求幂级数的收敛半径

1. 根据 Cauchy 判别法

   如果极限 $\lim_{n\to\infty}|c_n(z-a)^n|^{1/n}$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}|c_n(z-a)^n|^{\frac{1}{n}}\begin{cases}<1 & \text{级数绝对收敛}\\ >1 & \text{级数发散}\end{cases}$$

即

$$|z-a|\begin{cases}<\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}} & \text{级数绝对收敛}\\ >\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}} & \text{级数发散}\end{cases}$$

$\therefore$

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{c_n}\right|^{\frac{1}{n}} \tag{28}$$

2. 根据 d'Alembert 判别法

   如果极限存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right|\begin{cases}<1 & \text{级数绝对收敛}\\ >1 & \text{级数发散}\end{cases}$$

即

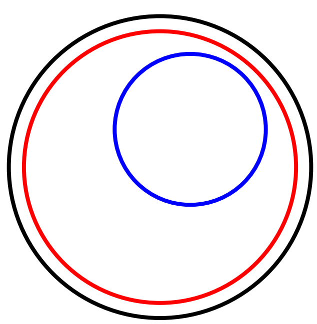
$$|z-a|\begin{cases}<\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| & \text{级数绝对收敛}\\ >\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| & \text{级数发散}\end{cases}$$

$\therefore$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{29}$$

幂级数性质

由 Abel 定理, 幂级数在其收敛圆内任一闭圆盘中一致收敛(如图).



$\forall\overline{G}\subset\{|z-a|<R\}$, $\exists r<R$, 使 $\overline{G}\subset\{|z-a|\le r\}\subset\{|z-a|<R\}$.

而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的每一项都是 z 的全平面解析函数. 因此, 根据上节, 在收敛圆内, 幂级数代表了一个解析函数, 并且可以对幂级数逐项积分, 逐项求导数.

Note 在收敛圆上, 幂级数可以收敛, 可以发散, 也可以在一部分点收敛, 在另一部分点发散.

Example 4.2 级数

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

Solution 级数收敛半径为 1. 级数在 $|z| = 1$ 上处处发散. □

Example 4.3 级数

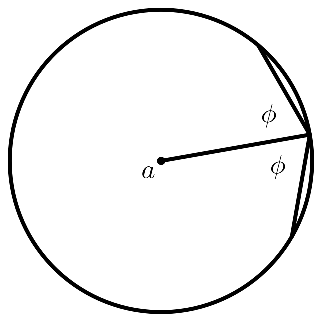
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$$

Solution 收敛半径是 1. 在收敛圆 $|z| = 1$ 上,

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

可见级数在收敛圆上处处绝对收敛. □

Theorem 4.20 (Abel 第二定理) *若幂级数 $\sum c_n(z-a)^n$ 在收敛圆内收敛到 $f(z)$, 且在收敛圆周上某点 z_0 也收敛, 和为 $S(z_0)$, 则当 z 由收敛圆内趋近于 z_0 时, 只要保持在以 z_0 为顶点, 张角为 $2\phi < \pi$ 的范围内(如图), $f(z)$ 就一定趋于 $S(z_0)$.*



Example 4.4 (习题6(4)) 利用

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots, \quad |z| < 1$$

以及 Abel 第二定理, 求级数和

$$\cos\theta - \frac{\cos 5\theta}{5} + \frac{\cos 7\theta}{7} - \frac{\cos 11\theta}{11} + - \cdots \quad -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

Theorem 4.21 (Dirichlet 判别法) *考虑级数*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

若序列 $\{a_k\}$ 单调且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, 又级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 的部分和序列有界, 即存在常数 $M > 0$, 使

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \le M \quad (n = 1, 2, ...)$$

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

Proof 考虑级数

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{z^{6k+1}}{6k+1}-\frac{z^{6k+5}}{6k+5}\right]$$

级数的收敛区域为 $|z|<1$. 如果 $S(z)$ 在 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时收敛, 则

$$\cos\theta-\frac{\cos5\theta}{5}+\frac{\cos7\theta}{7}-\frac{\cos11\theta}{11}+-\cdots=\mathrm{Re}S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

在收敛圆 $|z|<1$ 内, 级数 $S(z)$ 绝对收敛, 我们可以把它拆成两个级数

$$S(z)=S_1(z)-S_5(z),$$
$$S_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{6k+i}}{6k+i}.$$

现在来求 S_i 的级数和. 利用 $\ln(1-z)$ 公式, 令 $z\to zw$, $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ (ϕ 为实数)

$$\ln(1-zw)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}w^k.$$

令 $w^6=1$, 则

$$\ln(1-zw)=-\sum_{i=1}^{6}w^iS_i(z).$$

所以遍取 1 的 6 次方根, 就能得到 $S_i(z)$ 的 6 个方程, 从而求出各个 $S_i(z)$.

令 w 等于 1 的第 j 个 6 次方根 w_j, 将方程乘以待定系数 a_j, 求和得

$$\sum_{j=1}^{6}a_j\ln(1-zw_j)=-\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{6}a_jw_j^i\right)S_i(z).$$

因为

$$w_j^i=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi j/6}\right)^i=w_i^j$$

引入多项式

$$f(z)=\sum_{j=1}^{6}a_jz^{j-1}$$

则

$$\sum_{j=1}^{6}a_j\ln(1-zw_j)=-\sum_{i=1}^{6}w_if(w_i)S_i(z).$$

如果能够找到 $f(z)$, 使得

$$f(w_i)=\delta_{il}$$

则

$$S_l(z)=-\frac{1}{w_l}\sum_{j=1}^{6}a_j\ln(1-zw_j)$$

很容易验证

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{z^6-1}{6w_l^5(z-w_l)}=\frac{w_l(z^6-1)}{6(z-w_l)}\\=&\frac{w_l}{6}\sum_{j=1}^{6}w_l^{6-j}z^{j-1}=\frac{w_l}{6}\sum_{j=1}^{6}w_l^{-j}z^{j-1}.\end{aligned}$$

所以 $a_j = w_l^{1-j}/6$, 得

$$S_l(z) = -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} w_l^{-j}\ln(1 - zw_j).$$

即

$$S_1(z) = -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi j/3}\ln(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi j/3}),$$
$$S_5(z) = -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi j/3}\ln(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi j/3}).$$

相减,

$$\begin{aligned}S(z) =&\frac{\mathrm{i}}{3}\sum_{j=1}^{6}\sin(\pi j/3)\ln(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi j/3})\\ =&\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}\ln\frac{(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})}{(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3})(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/3})}\\ =&\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}\ln\frac{(1 + z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3})}{(1 - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(1 + z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3})}\quad |z| < 1\end{aligned}$$

我们不将因子乘开, 因为在计算对数函数时, 幅角要对每个因子计算.

在圆周上, 令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 幂级数取值

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{(6k+1)\mathrm{i}\theta}}{6k+1} - \frac{\mathrm{e}^{(6k+5)\mathrm{i}\theta}}{6k+5}\right]$$

为了应用 Abel 第二定理, 我们必须首先证明上面的级数和收敛. 当 $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 时, 容易证明级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{(6k+1)\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{(6k+5)\mathrm{i}\theta}\right]$$

有界. 所以, 由 Dirichlet 判别法, 可得上述级数和的确存在. 因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{(6k+1)\mathrm{i}\theta}}{6k+1} - \frac{\mathrm{e}^{(6k+5)\mathrm{i}\theta}}{6k+5}\right] =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}\ln\frac{(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3+\theta)})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi/3-\theta)})}{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3+\theta)})(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi/3-\theta)})}$$

当 $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{(6k+1)\mathrm{i}\theta}}{6k+1} - \frac{\mathrm{e}^{(6k+5)\mathrm{i}\theta}}{6k+5}\right]\\ =&\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}\ln\left\{\frac{[2\cos(\pi/6+\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+\theta/2)}]}{[2\sin(\pi/6+\theta/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2+\mathrm{i}(\pi/6+\theta/2)}]}\right.\\ &\left.\times\frac{[2\sin(\pi/6-\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2-\mathrm{i}(\pi/6-\theta/2)}]}{[2\cos(\pi/3-\theta/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi/6-\theta/2)}]}\right\}\\ =&\frac{1}{2\sqrt{3}\mathrm{i}}\left[\ln\frac{\cos(\pi/6+\theta/2)\sin(\pi/6-\theta/2)}{\sin(\pi/6+\theta/2)\cos(\pi/3-\theta/2)} + \mathrm{i}\pi\right]\end{aligned}$$

取实部, 最后得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\cos(6k+1)\theta}{6k+1}-\frac{\cos(6k+5)\theta}{6k+5}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

□

4.5 含参量的反常积分的解析性

Theorem 4.22 设

1. $f(t,z)$ 是 t 和 z 的连续函数, $t \geq a$, $z \in G$,
2. 对于任何 $t \geq a$, $f(t,z)$ 是 G 内的解析函数,
3. 积分 $\int_0^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 中闭一致收敛.

则 $F(z)=\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 内是解析的, 且

$$F'(z)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t.$$

积分 $\int_0^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 中闭一致收敛:
对于 G 内任意闭圆盘,
$\forall \epsilon>0$, $\exists T(\epsilon)$, 当 $T_2>T_1>T(\epsilon)$ 时, 有

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} f(t,z)\mathrm{d}t\right|<\epsilon.$$

Proof 任取一个无界序列 $\{a_n\}$

$$\begin{aligned}&a_0=a<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots,\\&\lim_{n\to\infty}a_n=\infty.\end{aligned}$$

令 $u_n(z)=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t,z)\mathrm{d}t$, 则根据上章关于含参量定积分的解析性的定理, 可知 $u_n(z)$ 是 G 内的解析函数. 又因为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)$$

在 G 上闭一致收敛，故根据 Weierstrass 定理，知

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)=\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$$

在 G 内解析，且

$$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(z)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t.$$

□

对于含参量的瑕积分也可以类似地处理, 只要积分在瑕点一致收敛.

在应用这个定理时, 需要判断无穷积分(或瑕积分)是否一致收敛. 常用的判别法是:

Theorem 4.23 (含参数无穷积分一致收敛的一个充分条件) *如果存在函数 $\phi(t)$，使得 $|f(t,z)| < \phi(t)$, $z \in \overline{G}$, 而且 $\int_a^\infty \phi(t)\mathrm{d}t$ 收敛, 则 $\int_a^\infty f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 $\overline{G}$ 上绝对而且一致收敛.*

含参量的无穷积分的一个例子

Example 4.5 *讨论积分*

$$F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Solution 这个积分中的被积函数显然满足定理的前两个条件, 而且因为对于复数$z = x + \mathrm{i}y$, 有

$$|\cos 2zt| = \sqrt{\cosh^2 2yt - \sin^2 2xt} \le \cosh 2|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}.$$

所以, 对于 z 平面上的任意一个闭圆盘上, $\exists y_0$, $|\mathrm{Im}\, z| < y_0$, 于是,

$$\left|\mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\right| < \mathrm{e}^{-t^2+2y_0 t},$$

而积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0 t}\mathrm{d}t$ 收敛，所以含参量的无穷积分(30)闭一致收敛, 因此, 这个积分作为 z 的函数, 在 z 平面解析. 更进一步, 就有

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} 2t\, \sin 2zt\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-t^2} \sin 2zt\Big|_0^\infty - 2z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\,\mathrm{d}t \\ &= -2zF(z). \end{aligned}$$

解这个微分方程, 就可以得到 $F(z) = C\mathrm{e}^{-z^2}$, 其中常数 C 是

$$C = F(0) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

这样, 最后就得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2zt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-z^2}. \tag{31}$$

□

4.6 渐近级数

先引进记号 O 和 o.

设 $f(z)$ 和 $\phi(z)$ 在 z_0 点的邻域内有定义, 且 $\phi(z)\neq 0$, 若 $z\to z_0$ 时, $f(z)/\phi(z)$ 有界, 则记为

$$f(z) = O\left(\phi(z)\right), \qquad \text{当 } z \to z_0$$

若 $\lim_{z\to z_0} f(z)/\phi(z) = 0$, 则记为

$$f(z) = o\left(\phi(z)\right), \qquad \text{当 } z \to z_0$$

渐近序列

设函数序列 $\{\phi_n(z)\}$ 在 z_0 点的邻域内有定义, 且 $\phi_n(z) \neq 0$ (z_0 点可以除外), 若对于所有的 n, 有

$$\phi_{n+1}(z) = o\left(\phi_n(z)\right), \qquad \text{当 } z \to z_0$$

则称函数序列 $\{\phi_n(z)\}$ 为 $z \to z_0$ 时的一个渐近序列.

渐近级数

若当 $z \to z_0$ 时, 对于每一个 m 值, 都有

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n\phi_n(z) = o\left(\phi_m(z)\right) \tag{32}$$

则称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z)$ 是函数 $f(z)$ 相对于 $\{\phi_n(z)\}$ 的渐近级数, 记为

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z) \tag{33}$$

渐近级数的定义说明, z 越接近z_0, 有限和 $\sum_{n=0}^{m} a_n\phi_n(z)$ (称为 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 的渐近近似) 越逼近于 $f(z)$. 它区别于通常的级数展开, 例如幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \cdots$$

后者是 z 点固定, 而级数的项数越多越准确,

$$\lim_{N\to\infty}\left[f(z) - \sum_{n=0}^{N} u_n(z)\right] = 0.$$

特别是, 在渐近级数的定义中, 并未要求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z)$ 收敛. 渐近展开级数可以(而且常常)不是收敛级数! 因此, 对于一定的 z, 并不能通过多取项数(即增大N) 来改善近似程度.

Example 4.6 (指数积分)

$$Ei(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0 \tag{34}$$

Solution 用分部积分的方法可以得到

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Ei}(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cdots \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots + \frac{(-)^{n-1}n!}{x^n}\right] \\
&\quad + (-)^{n+1}(n+1)!\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{35}$$

容易证明, 它的余项

$$\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{x^{n+2}}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}}$$

因此, (35) 式的确给出了 $-\mathrm{Ei}(-x)$ 在 $x \to \infty$ 时的渐近展开. 然而, 级数相邻两项之比

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x} = \infty$$

由 Cauchy 判别法可知级数发散.

且对于给定的 x, $-\mathrm{Ei}(-x)$ 的渐近近似中取 $N \approx x$ 项可以得到最佳逼近:

在此项之前，级数各项绝对值递降，而此后各项的绝对值反而递增.

□

渐近展开不同于幂级数展开, 还在于渐近级数通常都有一定的辐角限制, 即渐近展开只在一定的辐角范围内成立.

(这时关于 O 和 o 的定义以及渐近序列的概念都应作相应的修改.)

Example 4.7 (Γ 函数的渐近展开) *Stirling 公式当 $|z| \to \infty$, $|\arg z| < \pi$ 时,*

$$\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} \mathrm{e}^{-z} \sqrt{2\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + - \cdots \right\}$$