

## 2 解析函数

### 2.1 导数

可导和可微 设  $w = f(z)$  是区域  $G$  内的单值函数, 若极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1)$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z$  点可导 (可微). 极限值称为  $f(z)$  的导数 (微商), 记为

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (2)$$

相对实变函数, 可导即  $f'(z)$  存在是一个更强的限制, 这是因为

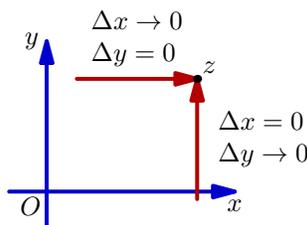
$$\begin{aligned} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) &\implies \Delta w = \Delta u + i\Delta v \\ z = x + iy &\implies \Delta z = \Delta x + i\Delta y \end{aligned}$$

所以

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \quad (3)$$

函数在  $z$  点可导, 就意味着  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  以任意方式趋向于零, 上式右边的极限都趋于同样的有限值, 即该点导数值  $f'(z)$ .

在  $z$  平面上有无限条线路使  $\Delta z \rightarrow 0$ , 我们选取如下两条路线:



1.  $\Delta x \rightarrow 0$  但  $\Delta y = 0$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

2.  $\Delta y \rightarrow 0$  但  $\Delta x = 0$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

**Theorem 2.1** (Cauchy-Riemann 方程<sup>1</sup>) 若  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z$  点可导

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (6)$$

*Note* C-R 方程是函数可导的必要条件, 但不是充分条件. 它只是保证了  $\Delta z$  以平行于实轴和虚轴这两种特殊方式趋于 0 时,  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  逼近于同一个值.

<sup>1</sup>简记为 C-R 方程

**Example 2.1** 设  $f(z)$  在  $x$ - 和  $y$ - 轴上等于 1, 在其它位置等于 0. 在  $z = 0$  点

1.  $f(z)$  满足 C-R 方程.

2.  $f'(0)$  不存在.

**Solution** 1.  $u(x, 0) = 1, u(0, y) = 1, v(x, y) = 0$ . 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= 0 & \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= 0 & \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

满足 C-R 方程.

2.  $f(z)$  在  $z = 0$  点显然不连续. □

**Theorem 2.2** 若函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z$  点满足 C-R 方程, 且函数的四个偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  在  $z$  点连续. 则函数在  $z$  点可导.

**Proof** 由数学分析可知, 偏导数连续则多元函数可微

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (7)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (8)$$

于是  $\Delta z \rightarrow 0$  时

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y \end{aligned}$$

由 C-R 方程

$$\begin{aligned} \Delta w &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i\Delta y) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta z \end{aligned}$$

于是

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

□

### 求导运算

和实数情形一样,

1. 如果函数  $f(z)$  在  $z$  点可导, 则在  $z$  点必连续

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \cdot \Delta z = f'(z) \cdot 0 = 0$$

2. 高等数学中实变函数的各种求导公式都适用于复变函数, 如四则运算规则、复合函数规则及各种初等函数的导数. 如

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad \dots$$

## 2.2 解析函数

**解析函数** 若  $f(z)$  在区域  $G$  内每一点都可导, 并且  $f'(z)$  连续, 则称  $f(z)$  为  $G$  内的**解析函数**.

*Note* 下章将证明: 任何函数  $f(z)$  在区域内可导, 则  $f'(z)$  一定连续.

**Example 2.2**  $z^n$  是全平面上的解析函数.

**Theorem 2.3** 函数为区域  $G$  内的解析函数的充分必要条件是函数在区域  $G$  内满足  $C-R$  条件且四个偏导数连续.

### 函数解析性的限制

解析性是很严格的要求

1. 解析函数的实部和虚部不是独立的. 知道了其中之一, 根据  $C-R$  方程, 就可以唯一地确定另一个, 最多相差一个任意常数.
2. 不是任意的二元函数都可以作为解析函数的实部或虚部, 它们必须是调和函数. 即  $u$  和  $v$  满足二维 Laplace 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

**Example 2.3** 已知实部  $u(x, y)$ , 求虚部  $v(x, y)$ .

**Solution** 已知实部  $u(x, y)$ , 则虚部  $v(x, y)$  满足

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (11)$$

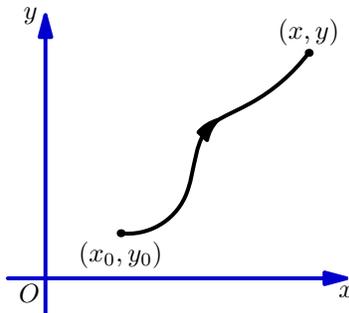
由  $C-R$  方程

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (12)$$

积分

$$v(x, y) = \int_{\text{参考点}(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + \text{常数 } v(x_0, y_0) \quad (13)$$

任取积分路径:



□

**Example 2.4** 设  $u(x, y) = x^2 - y^2$ , 求  $v(x, y)$  和  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

**Solution** 由上例<sup>2</sup>

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 2(ydx + xdy)$$

$$\begin{aligned}v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)=(0,0)}^{(x,y)} 2(ydx + xdy) + C \\&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} 2(ydx + xdy) + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2(ydx + xdy) + C \\&= 0 + 2 \int_0^y xdy + C = 2xy + C\end{aligned}$$

相应解析函数

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C)$$

最后应表为  $z$  的函数

$$f(z) = (x + iy)^2 + iC = z^2 + iC$$

□

**Proof** 以后我们会学到, 解析函数的实部和虚部  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  的二阶偏导数一定存在并且连续. 于是可以对 C-R 方程求导

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

交换微商次序, 得  $u$  和  $v$  满足二维 Laplace 方程 即为调和函数. □

**Example 2.5** 例如: 上例中的  $u(x, y) = x^2 - y^2$  即为满足 Laplace 方程的调和函数, 所以可以作为解析函数的实部或虚部. 相反,  $x^2 + y^2$  就不能作为解析函数的实部或虚部.

可见函数的解析性, 是一个很高的要求. 正因为要求高, 解析函数具有一系列的重要性质. 实际上解析函数是复变函数部分的中心课题.

### 点解析性

函数的解析性, 总是和一定的区域联系在一起. 但有时我们也说函数在某点解析。

**解析点和奇点** 如果函数在某点的某一个邻域内解析, 则称函数在该点解析, 该点则称为函数的 **解析点**. 如果函数在某点不解析, 则称该点为函数的 **奇点**.

**Example 2.6 (奇点)** 奇点有很多情况. 函数在某一点不解析, 可以是:

- 函数在某点  $z_0$  无定义. 例如:  $w = 1/z$
- 函数在  $z_0$  虽有定义但不可导. 例如:  $w = \sqrt{z}$
- 函数在  $z_0$  虽可导, 仍可不解析. 例如:  $w = z^{3/2}$

因为还可以在其任意邻域内都有点无定义、不可导, ...

<sup>2</sup>或可直接看出全微分为

$$dv = 2d(xy)$$

也得

$$v = 2xy + C$$

## 2.3 初等函数

本节介绍一些基本的解析函数, 它们都是实函数在复数域中的推广

1. 幂函数  $z^n$  (整数幂次)
2. 指数函数  $e^z$
3. 三角函数  $\sin z, \cos z$
4. 双曲函数

### 幂函数 $z^n$ (整数幂次)

$n = 0, 1, 2, \dots$   $z^n$  在全平面解析

$n = -1, -2, -3, \dots$  除  $z = 0$  奇点外处处解析

幂函数为无界函数, 其导数为

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (14)$$

由幂函数可以定义 ( $n$  次) 多项式(函数)

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

和有理函数

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

其中  $P_n(z)$  和  $Q_m(z)$  分别是  $n$  次多项式和  $m$  次多项式.

指数函数  $e^z$

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (15)$$

于是

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

由 Euler 公式, 得<sup>3</sup>

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (16)$$

显然  $e^z$  是无界函数.

**Theorem 2.4**  $e^z$  在全平面解析, 其导数为

$$(e^z)' = e^z \quad (17)$$

**Proof** 由

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

求  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  的偏微商, 分别得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

---

<sup>3</sup>可作为指数函数的定义.

满足 Cauchy-Riemann 方程, 且各偏微商连续, 所以  $e^z$  在全平面可导和解析. 其导数计算如下

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z\end{aligned}$$

□

**三角函数**  $\sin z, \cos z$

$$\sin z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (18)$$

$$\cos z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (19)$$

可得 Euler 公式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (20)$$

及

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (21)$$

于是<sup>4</sup>

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (22)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (23)$$

显然,  $\sin z, \cos z$  在全平面解析. 但和实三角函数不同,  $\sin z, \cos z$  为无界函数, 其模可以大于 1, 例如

$$\begin{aligned}i \sin i &= \frac{e^{-1} - e^1}{2} \approx -1.175 \\ \cos i &= \frac{e^{-1} + e^1}{2} \approx 1.543\end{aligned}$$

但仍有

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (24)$$

*Note* 事实上, 所有的全平面解析的复变函数, 或者是一个常数, 否则一定是无界函数 (见后章).

导数为

$$(\sin z)' = \cos z \quad (25)$$

$$(\cos z)' = -\sin z \quad (26)$$

其它的三角函数还有

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \dots$$

---

<sup>4</sup>可作为三角函数的定义

## 双曲函数

$$\text{双曲正弦 } \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (27)$$

$$\text{双曲余弦 } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (28)$$

导数为

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad (29)$$

$$(\cosh z)' = \sinh z \quad (30)$$

双曲函数和三角函数可以互化

$$\sinh z = -i \sin iz \quad (31)$$

$$\cosh z = \cos iz \quad (32)$$

同样

$$\sin z = -i \sinh iz \quad (33)$$

$$\cos z = \cosh iz \quad (34)$$

## 2.4 多值函数

解析函数必须是单值函数, 即给定一个自变量的值, 只有一个函数值与之对应. 但实际工作中往往会遇到多值函数. 例如上述初等函数的反函数都是多值函数.

对于多值函数, 可以限制函数值的取值范围, 对每一个自变量的值指定某一个函数值与之对应, 将之化为单值函数, 然后讨论其解析性质.

1. 对数函数  $\ln z$
2. 根式函数  $\sqrt[n]{z}$
3. 幂函数  $z^\alpha$

**对数函数  $\ln z$**

$w = \ln z$  即  $z = e^w$ . 由

$$z = re^{i\theta} = |z|e^{i \arg z}$$

得

$$w = \ln z = \ln |z| + i \arg z \quad (35)$$

可见, 函数的多值性来源于自变量幅角的多值性.

### 多值函数单值化

为了将多值函数化为单值函数,可规定自变量的幅角变化范围,从而限制函数值的取值范围.例如规定

$$0 \leq \arg z < 2\pi$$

这时对于正实轴上的点  $x_0 > 0$

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \ln z = \begin{cases} \lim_{\substack{r \rightarrow x_0 \\ \theta \rightarrow 0}} (\ln r + i\theta) = \ln x_0 \\ \lim_{\substack{r \rightarrow x_0 \\ \theta \rightarrow 2\pi}} (\ln r + i\theta) = \ln x_0 + 2\pi i \end{cases}$$

所以函数在正实轴上(包括原点)不连续、不解析.

#### Theorem 2.5 函数

$$w = \ln z = \ln |z| + i \arg z \quad 0 \leq \arg z < 2\pi$$

的解析区域为

$$\text{全平面 } \mathbb{C} \setminus \text{正实轴 } [0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \arg z = 0\}$$

在解析区域, 导数为

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \quad (36)$$

**Proof** 在极坐标表示下

$$u(r, \theta) = \ln r, \quad v(r, \theta) = \theta$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

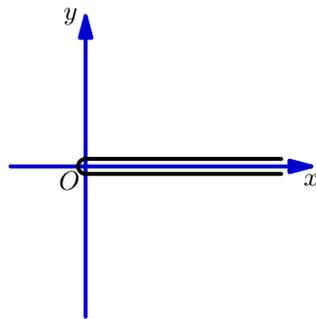
满足极坐标下的 C-R 方程, 且偏微商连续, 所以在区域  $\mathbb{C} \setminus \{z \mid \arg z = 0\}$  内函数可导和解析. 其导数为

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{r}{z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ &= \frac{r}{z} \frac{1}{r} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

□

### 割线

不连续点的集合为射线  $[0, +\infty)$  称为**割线**. 当  $z$  由上方趋于割线时  $\arg z \rightarrow 0$ , 当  $z$  由下方趋于割线时  $\arg z \rightarrow 2\pi$ .  $\arg z = 0$  称为**割线上岸**,  $\arg z = 2\pi$  称为**割线下岸**.



规定自变量的变化范围, 也就是规定割线(包括割线的位置和上下岸的自变量的取值).

Note 必须指出, 规定自变量的变化范围 (作割线), 有很大的任意性. 如, 可规定

$$\theta \leq \arg z < 2\pi + \theta \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

由于割线上下岸的辐角相差  $2\pi$ , 所以只需给出割线上岸或割线下岸的辐角取值.

### 枝点

- 我们看到, 绝大部分割线上的点的不解析 (不连续) 性都可以通过重新规定割线位置消除, 即它们的不解析是因为割线规定造成.
- 但割线的端点处 (这里是原点和无穷远点) 的不解析 (不连续) 性无法通过重新规定割线位置消除, 称为枝点.
- 枝点总是多值函数的奇点.
- $\ln z$  的枝点为  $0, \infty$ .

### 根式函数 $\sqrt[n]{z}$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \quad (37)$$

同样为多值函数. 可规定

$$0 \leq \arg z < 2\pi, \dots$$

化为单值函数. 由

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{(\ln z)/n}$$

其解析区域仍为

$$\text{全平面 } \mathbb{C} \setminus \{z \mid \arg z = 0\}$$

函数在  $\{z \mid \arg z = 0\}$  上非解析, 是为函数的割线.

$0, \infty$  为函数的枝点.

在解析区域内, 由  $z = w^n$ , 对  $z$  求导得

$$1 = nw^{n-1}w' = nw^n w'/w = nz w'/w$$

所以

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz} \quad (38)$$

### 幂函数 $z^\alpha$

$$z^\alpha \equiv e^{\alpha \ln z} \quad (39)$$

解析区域, 割线和枝点均与  $\ln z$  相同.

在解析区域, 其导数为

$$(z^\alpha)' = z^\alpha \cdot \alpha(\ln z)' = \frac{\alpha z^\alpha}{z} \quad (40)$$

## 单值分枝

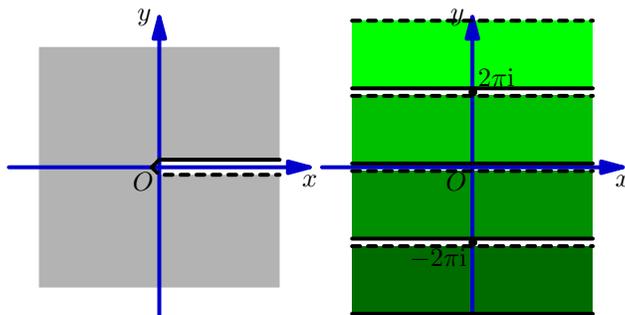
对于对数函数

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

限制

$$2k\pi \leq \arg z < 2(k+1)\pi$$

即化为单值函数. 显然,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  取不同的值, 会得到不同的单值函数.



我们把每个不同的单值函数, 称为多值函数的一个**单值分枝**. 每个单值分枝都是单值函数, 而整个多值函数就是它的各个单值分枝的总和.

## Riemann 面

割线有一定的人为性. 在割线上, 单值化后的函数值不连续. 这是上述单值化方法的一个缺点.

### Question

是否可以定义对数函数, 而无需人为地引入割线和单值分枝?

1851年, George Riemann 在他的博士论文中引入了 Riemann 面. 在 Riemann 面上定义多值函数无需引入割线, 也就不需要规定单值分枝.

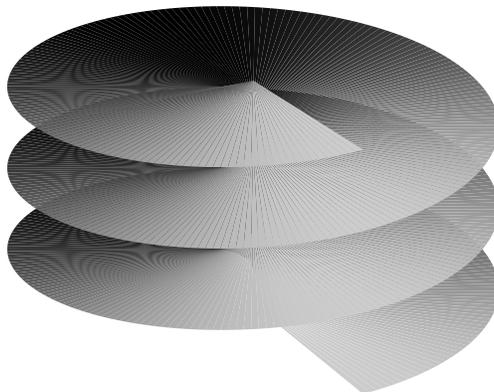
## Riemann 面的构造

我们可以给复数面贴上不同的标签 ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 或更直观地, 涂上不同的颜色以区别辐角的不同取值范围

$$2k\pi \leq \arg z < 2(k+1)\pi$$

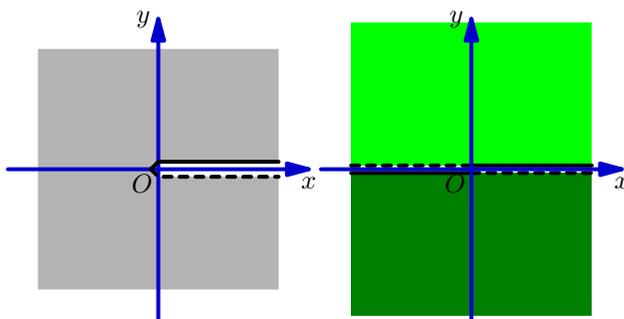
这样就得到了  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  许多个的复平面. 对数函数将每个复平面映射到不同的单值分枝.

然后我们再将这复平面按函数的连续性粘接在一起, 就得到了对数函数的 **Riemann 面**. 每个复平面称为 Riemann 面的一叶或叶面. 对数函数则为 Riemann 面上的单值函数.



对数函数的 Riemann 面如同围绕原点的旋转楼梯.

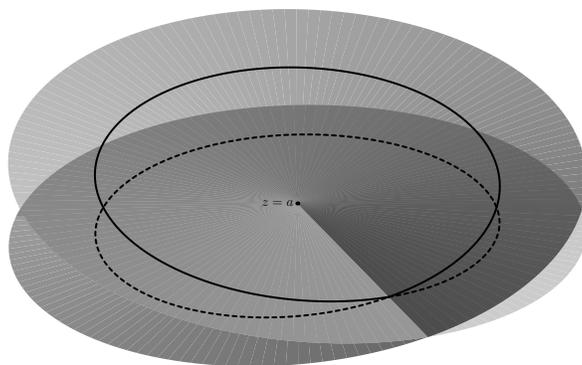
根式函数  $w = \sqrt{z}$  有两个单值分枝, 分别是  $w$  的上半平面和下半平面:



$$0 \leq \arg z < 2\pi \text{ 给出单值分枝 I: } 0 \leq \arg w < \pi$$

$$2\pi \leq \arg z < 4\pi \text{ 给出单值分枝 II: } \pi \leq \arg w < 2\pi$$

这时, 在几何图形上应将两个割开的  $z$  平面粘接起来, 第一个面的割线下岸 ( $\arg z = 2\pi$ ) 和第二个面的割线上岸 ( $\arg z = 2\pi$ ) 相连, 同时, 第一个面的割线上岸 ( $\arg z = 0$ ) 和第二个面的割线下岸 ( $\arg z = 4\pi$ ) 相连. 这就构成了二叶 Riemann 面.



根式函数的 Riemann 面是在高维空间中拼接的. 上图为其在三维空间中的投影. 两叶 Riemann 叶面看上去相交, 其实不然.

对于更复杂的多值函数, 例如  $w = \sqrt[3]{z-a}$  或  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  等, 也可以类似地讨论. 将各单值分枝对应于不同的复平面  $z$  (即为 Riemann 面的各个叶面, 上有一些割线), 并将各叶面上的割线按函数连续性粘接起来, 就是相应的 Riemann 面.

原则上, 对于任意的多值函数, 都可以构造一个 Riemann 面作为自变量  $z$  平面的扩展.

### Riemann 面的一叶

可以想像, 复杂多值函数的 Riemann 面会变得非常复杂. 在实际运用时, 我们仍像以前的作法, 在复平面上通过割线来表示多值函数的单值化. 不过现在的带割线的复平面只是 Riemann 面的一叶!

- 当  $z$  在复平面上连续变化时, 函数值连续变化.
- 而当  $z$  通过割线时, 则进入相邻的 Riemann 面, 多值函数在另一个单值分枝取值, 仍然连续地改变.

### 找枝点与作割线

确定多值函数的单值分枝, 限制自变量辐角的取值, 首先应找到多值函数的枝点并做割线.

### 找枝点

若  $z$  点绕枝点一周回到原处, 函数值并不还原 (进入 Riemann 面的另一叶), 由此可确定多值函数的枝点.

再将枝点用割线连接, 这样就确定多值函数的单值分枝.

### 另一种确定单值分枝的函数值的方法

通过规定割线上下岸的辐角值, 即可确定多值函数的单值分枝.

另一种确定单值分枝上的函数值的方法是:

规定函数  $w$  在某一点  $z_0$  的值, 并通过  $z$  的连续变化路线来确定函数在其它各点的值—当  $z$  沿曲线连续变化时,  $w$  也随之连续变化.

**Example 2.7** 多值函数  $w = \sqrt{z^2 - 1}$ .

1. 确定函数的枝点并作割线.
2. 规定当  $w(0) = i$ , 求  $w(i)$  之值.

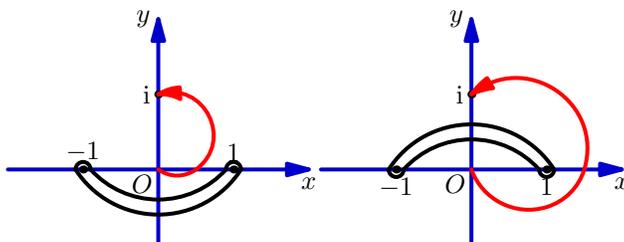
**Solution** 首先求出所有的函数值. 设  $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$ , 则

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

枝点为 1 和  $-1$ , 而  $\infty$  不是枝点.

割线的划分有任意性. 接下来, 我们按如图所示的两种不同方法作割线连接两枝点.

$\sqrt{z^2 - 1}$  单值化



下一步, 求  $z = 0$  处的辐角值. 要求

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta_1 = \pi + 2k_1\pi \quad \theta_2 = 0 + 2k_2\pi$$

所以取  $\theta_1 = \pi$ ,  $\theta_2 = 0$  来计算. 当  $z$  沿不同路径到达  $i$  点时, 在  $z = i$  处,  $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$

1.  $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$$w(i) = \sqrt{2}i$$

2.  $\theta_1 = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$$w(i) = -\sqrt{2}i$$

□