Part I
复变函数

1 复变函数

1.1 复数及其运算规则

复数的引入

考虑二次方程

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

其通解为

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

当 $4AC > B^2$ 时, 便会出现复数

$$x = \frac{-B \pm \mathrm{i}\sqrt{4AC - B^2}}{2A}.$$

虚单位

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1}$$

*为 -1 的平方根中的一个, 称为**虚单位**.*

复数 *$z = x + \mathrm{i}y$ 定义为满足以下运算规则的一对有序实数 (x, y):*

$$\text{加法} \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{2a}$$
$$\text{乘法} \qquad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \tag{2b}$$

复数域 *所有复数的集合, 记为 $\mathbb{C}$.*

实部 $\mathrm{Re}z = x$.

虚部 $\mathrm{Im}z = y$.

相等

$$z = 0 \iff x = y = 0, \tag{3a}$$
$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2. \tag{3b}$$

代数运算

作为代数, 复数运算遵从一般的代数运算规则

1. 加法交换律$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
2. 加法结合律$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,
3. 乘法交换律$z_1z_2 = z_2z_1$,
4. 乘法结合律$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$,
5. 乘法对加法的分配律$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

代数运算举例 将复数看成是 i 的一次式, 加上复数虚单位 i 的性质 (1) 即可完全确定复数的运算.

1. 加法 (减法)

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2). \end{aligned} \tag{4}$$

2. 乘法

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \tag{5}$$

3. 除法 ($z_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \\ &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \cdot \frac{x_2 - \mathrm{i}y_2}{x_2 - \mathrm{i}y_2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

   其中 $x_2 - \mathrm{i}y_2$ 为 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的复共扼.

□

Example 1.1 求 $w = \sqrt{z}$, 即 $w^2 = z$.

复数的平方根 设 $z = a + \mathrm{i}b$, $w = x + \mathrm{i}y$, 满足

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b.$$

即

$$(x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy) = a + \mathrm{i}b.$$

必须

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b. \end{aligned}$$

解得 ($b \geq 0$)

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right),$$

或 ($b < 0$)

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right).$$

□

Example 1.2 求解 $z^4 + \mathrm{i} = 0$.

Solution 令 $z^2 = w$. 则 $w^2 = -\mathrm{i}$. 代入公式, 令 $a = 0$ 及 $b = -1$

$$w = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right).$$

先考虑方程 $z^2 = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$. 同样, 代入公式, 令 $a = 1/\sqrt{2}$ 及 $b = -1/\sqrt{2}$, 得两解

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}}\right).$$

另两解为

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}}\right).$$

□

Theorem 1.1 *设 z 为复数. 则总存在另一复数 w 为其平方根, 使得 $w^2 = z$.*

Note *$-w$ 为其另一个平方根.*

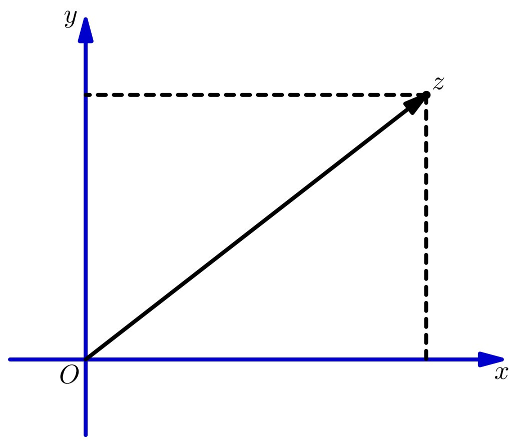
Theorem 1.2 (代数基本定理) *任一 n 次(复数)多项式 $(n > 0)$ 都有一个复数根.*

因此我们可以把多项式因式分解，循环使用这个定理，可以得知任一n次多项式在C中都有n个根（包括重根）

1.2 复数的几何表示

复数的几何表示

一个复数可用复平面 (也用 $\mathbb{C}$ 表示) 上的一个点表示. 还可以表示为复平面的一个矢量.



复数不能比较大小

实数域是有序域

$$\text{有序域} = \{0, \text{正数}, \text{负数}\}.$$

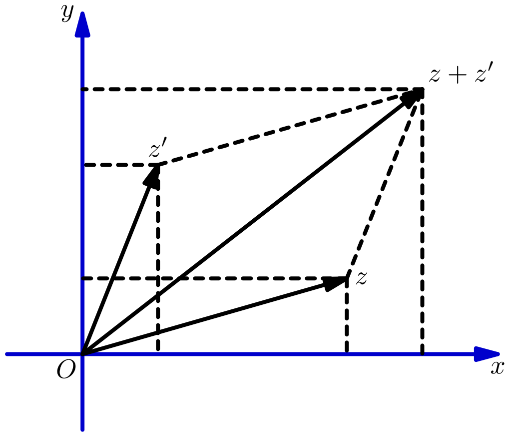
正正得正, 可得,

$$\forall a \in \text{有序域}, \quad a^2 = a \cdot a \geq 0$$

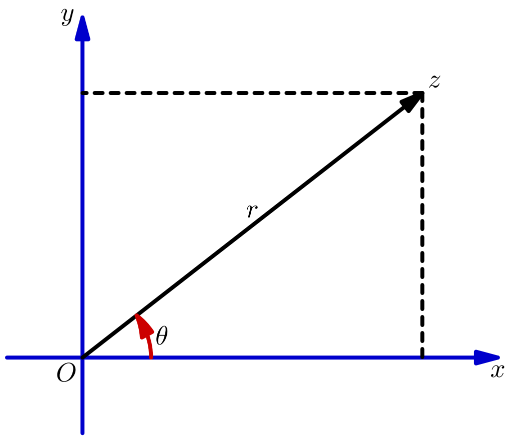
但复数域 $\mathbb{C}$ 有 $\mathrm{i}^2 = -1$.

复数加法的几何意义

根据复数的加法规则, 可以看出复数加法的几何意义: 矢量相加的平行四边形法则.



直角坐标 (x, y) 到极坐标 (r, θ)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{7}$$

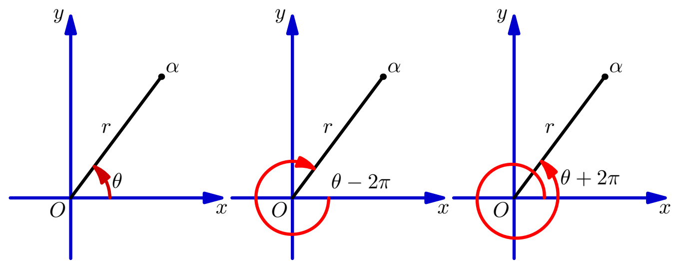
直角坐标 (x, y) 到极坐标 (r, θ)(cont.)

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{8}$$

模 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

辐角 $\arg z = \theta$.

辐角的多值性



$$\theta = \theta_p + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

主辐角 θ_p *为辐角的主值* $(-\pi < \theta_p \leq \pi)$.

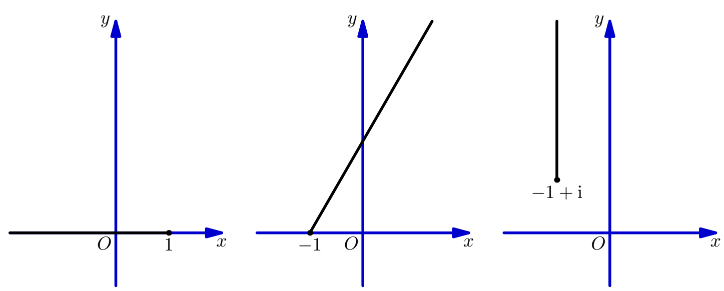
Example 1.3 把下列关系用几何图形表示出来

1. $\arg(1 - z) = 0$,
2. $\arg(1 + z) = \dfrac{\pi}{3}$,
3. $\arg(z + 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$.

等式的几何表示 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 代表复平面上的一点, 复数的一个等式关系则通常代表复平面上的一段曲线.

1. $1 - z$ 为复平面上两矢量 1 和 z 之差, $1 - z$ 沿 x 轴, 所以 z 应在 x 轴上且小于 1.
2. $1 + z$ 则为复平面上两矢量 z 和 -1 之差, $1 + z$ 辐角 $60°$, 为 -1 点引出的一条射线.
3. $z + 1 - \mathrm{i}$ 为 z 与 $-1 + \mathrm{i}$ 之差, 所以为由 $-1 + \mathrm{i}$ 引出平行 y 轴的一条射线.

□



$\arg(1 - z) = 0$ $\arg(1 + z) = \frac{\pi}{3}$ $\arg(z + 1 - \mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$

复共扼

复共扼 体现出了i与-i均为z^2=-1的根这么一个对称性原则。

$$z^* = (x + \mathrm{i}y)^* = x - \mathrm{i}y. \tag{9}$$

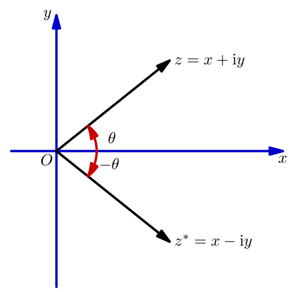
复共扼是一个相互关系

$$(z^*)^* = z. \tag{10}$$

显然

$$(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \tag{11a}$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \tag{11b}$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}. \tag{11c}$$

复共扼 z^* 的几何表示



如图

$$\arg z = -\arg z^*. \tag{12}$$

我们有

$$z \cdot z^* = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2+y^2 = |z|^2, \tag{13}$$

以及

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}. \tag{14}$$

复数相乘

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{15}$$

引诱我们得到De Moivre定理和Euler公式

Theorem 1.3 (复数乘法)

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \tag{16}$$
$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{17}$$

Note 复数辐角可相差 2π 的整数倍.

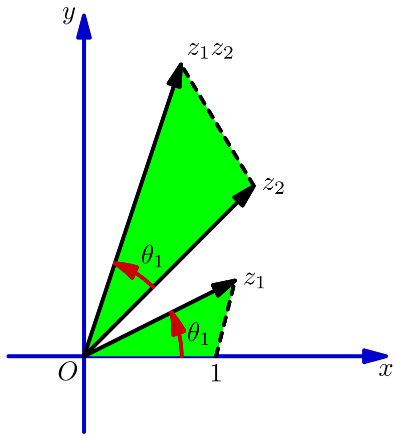
复数相除

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]. \tag{18}$$

Theorem 1.4 (复数除法)

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{19}$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{20}$$

复数乘法的几何表示



如图, 两个阴影三角形为相似三角形.

De Moivre 定理 (棣美佛 1667 — 1754)

几个复数相乘时

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]. \tag{21}$$

令 $z_1=z_2=\cdots=z_n$,

Theorem 1.5 (De Moivre 定理)

$$z^n = r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta). \tag{22}$$

Example 1.4 复数的 n 次方根. 求 $w=\sqrt[n]{z}$ 即 $w^n=z$.

Solution 设

$$z=\rho(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi).$$

同样

$$w=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

由 De Moivre 定理

$$w^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

比较, 得

$$\rho=r^n,$$
$$\phi=n\theta.$$

即

$$r=\sqrt[n]{\rho},$$
$$\theta=\frac{\phi}{n}.$$

于是

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\phi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\phi}{n}\right).$$

考虑到辐角的多值性, 得到 n 个不同的根

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\phi_p+2\pi k}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\phi_p+2\pi k}{n}\right),$$

$-\pi<\phi_p\le\pi$, $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$. □

Theorem 1.6 (n 次方根) 设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 它的 n 次方根为 n 个复数

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{23}$$

这里的n次根号是个单值函数

Example 1.5 求 i 的平方根.

Solution

$$\mathrm{i} = 1(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}).$$

所以

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathrm{i}})_k &= \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right),\end{aligned}$$

$k = 0, 1$. 两根分别为

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathrm{i}})_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\\ (\sqrt{\mathrm{i}})_1 &= \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}).$$

□

Example 1.6 求解 $z^8 = 1$.

Solution 因为

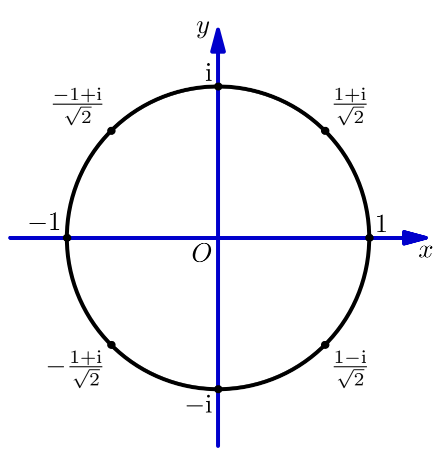
$$1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0.$$

由 n 次方根定理

$$\begin{aligned}z &= \cos\frac{k2\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{k2\pi}{8}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 7\\ &= 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \mathrm{i}, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -\mathrm{i}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

□

如图, 八个根 $z = \sqrt[8]{1}$ 均匀分布在单位圆上.



复数的指数表示

Euler 公式 (欧拉 1707 — 1783)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{24}$$

实际上这里有级数的含义，但是目前还没学无穷级数

复数 z 的极坐标表示可简单地记为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}. \tag{25}$$

复数的乘法和除法运算简化为 (由 (16), (17) 和 (19), (20) 得)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{26}$$

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}, \tag{27}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{28}$$

1.3 复变函数

复变函数

与实函数定义相仿,

函数 设在复平面 $\mathbb{C}$上有一点集 E, 如果对于 E 内每一个 z 值, 都有一个或多个[1]复数值 w 与之对应, 则称 w 为 z 的**函数**. 记为 $w = f(z)$. E 为其**定义域**.

即 $\forall z \in E, \exists w = f(z)$.

$$z = x + iy,$$
$$w = u + iv.$$

所以

$$\begin{aligned} w = f(z) &= f(x, y), \\ &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned} \tag{29}$$

复变函数不过是两个二元实变函数的有序组合.

Example 1.7 设 $z = x + iy$, 求 $\dfrac{z+2}{z-1}$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$.

Solution

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z-1} &= \frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy} = \frac{(x+2)+iy}{(x-1)+iy} \cdot \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)+y^2+i[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

这样,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2},$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}.$$

□

[1] 多值函数

一些初等函数

除了多项式外, 基本的函数还有三角函数和指数函数.

实变函数

Taylor 展开

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \tag{30}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \tag{31}$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{32}$$

复变函数

三角函数和指数函数可以定义为幂级数, 且其幂级数展开式与相应实变函数的幂级数展开式相同

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \tag{33}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \tag{34}$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{35}$$

作变换 $z \to \mathrm{i}z$, 即得

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \cos z + \mathrm{i} \sin z. \end{aligned}$$

这就是 Euler 公式, 它对任意复数 z 都成立.

1.4 复平面的拓扑简介

邻域 复平面上 $|z-a| = r$ 为一圆. 圆内 $|z-a| < r$ $(r > 0)$ 称为以 a 为中心, r 为半径的**圆盘**或 a 的一个**邻域**, 或 r-邻域.

$|z-a| \le r$ 则称为以 a 为中心, r 为半径的**闭圆盘**.

空心邻域 z_0 的空心邻域, 指的是以 z_0 为圆心的环域 $0 < |z - z_0| < \delta$.

聚点 给定集合E, 若复数a, 对于任意给定的$\epsilon > 0$ 恒有$z \in E$, 满足$0 < |z-a| < \epsilon$ 则称a 为E 的一个**聚点** *(或**极限点**)*

即a 的任意小邻域内都包含有不等于a 的点$z \in E$

孤立点 给定集合 E, a 属于 E, 如果以点 a 为圆心作一个圆, 当半径 ϵ 足够小时, 空心邻域 $0 < |z-a| < \epsilon$ 内所有点 z 都不属于点集 E, 即 $z \notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**孤立点**.

即点集E 的点a 不是E 的聚点.

内点　给定集合 E, a 属于 E, 如果以点 a 为圆心作一个圆, 当半径 ϵ 足够小时, 圆内所有点 $|z-a|<\epsilon$ 都属于点集 E, 即 $z \in E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**内点**.

即存在 a 的某个邻域完全包含在 E 内.

边界点　给定集合 E, 如果以点 a 为圆心作一个任意半径 ϵ 的圆, 圆内总有两点 z_1 和 z_2, $|z_{1,2}-a|<\epsilon$, 其中 $z_1 \in E$ 而 $z_2 \notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**边界点**.

边界点包括 E 的孤立点. 集合的边界点不一定属于集合.

内部　集合 E 的**内部**由所有 E 的内点组成. 记为 $\mathring{E}$.

边界　集合 E 的**边界**由所有 E 的边界点组成. 记为 ∂E.

闭包　集合 E 的**闭包**由 E 加上 E 的所有边界点组成. 记为 $\overline{E}$.

显然

$$\overline{E} = E + \partial E = \mathring{E} + \partial E.$$

开集　如果集 E 即它的内部, 则 E 称为**开集**.

即开集 E 的点全部是内点: $E = \mathring{E}$.

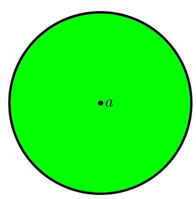
Note　任何集合 E 的内部 $\mathring{E}$ 必然是一开集.

闭集　如果集 E 即它的闭包, 则 E 称为**闭集**.

即闭集 E 包括它的所有边界点: $E = \overline{E}$.

Note　任何集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 必然是一闭集.

Example 1.8　圆盘 $E : |z-a|<r$.

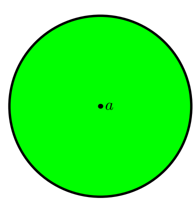


Solution　$\forall z_0 \in E$, 显然 $\exists \epsilon > 0$, 使得 z_0 的 ϵ-邻域 $|z-z_0|<\epsilon$ 内所有点 z 都属于圆盘即 $z \in E$. 于是圆盘 $E : |z-a|<r$ 中的点全部是它的内点. 因此圆盘 (邻域) 是一个开集.

E 的闭包 $\overline{E}$ 即闭圆盘 $|z-a| \le r$, 它是一个闭集.

E 的边界为 $\partial E = \overline{E} - E$ 由圆 $|z-a|=r$ 组成. □

Example 1.9　$E : 0<|z-a|<r$.



Solution　E 为开集.

$\overline{E}$ 仍为闭圆盘 $|z-a| \le r$.

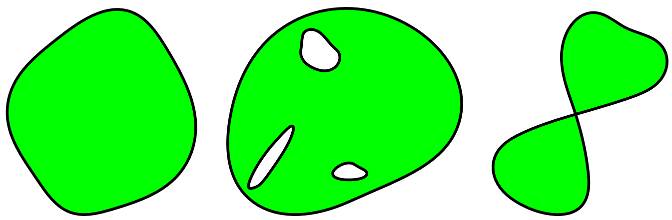
∂E 由圆周 $|z-a|=r$ 及孤立边界点 $z=0$ 组成. □

区域　区域为具有下列两个性质的点集

1. 开集: 全部由内点组成,

2. 连通性: 点集中任意两点都可以用一条折线连接起来, 折线上的点全都属于此点集.

Example 1.10　下列点集是否区域?



(a)　　*(b)*　　*(c)*

区域与非区域　由区域定义来判断:

(a) 是,

(b) 有洞也是,

(c) 自相交不是. 看似有交点, 但交点非内点.

□

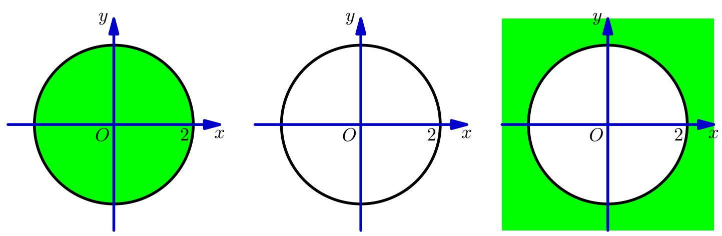
闭区域　区域 G 的闭包 $\overline{G}$ 即区域 G 加上边界 ∂G 构成**闭区域**.

通常用 G 代表区域, $\overline{G}$ 代表闭区域, C 代表边界. 则

$$\overline{G} = G + \partial G = G + C. \tag{36}$$

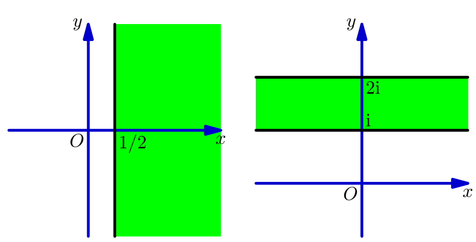
区域用不等式表示

等式代表复平面上的一段曲线, 而一个关于复数的不等式则通常代表复平面上的一个区域.
下图中, 不等式 $|z| < 2$ 和 $|z| > 2$ 都是区域 (等式 $|z| = 2$ 为闭集).



$|z| < 2$　　$|z| = 2$　　$|z| > 2$

同样, 下图中, 不等式 $\mathrm{Re}z > \frac{1}{2}$ 和 $1 < \mathrm{Im}z < 2$ 也是区域.



$\mathrm{Re}z > 1/2$　　$1 < \mathrm{Im}z < 2$

1.5 极限和连续

复变函数中极限和连续概念是建立在邻域概念上的.

极限 设函数在 z_0 的空心邻域内有定义. 如果存在复数 A, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon) > 0$, 使当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 $z \to z_0$ 时, $f(z)$ 的**极限**存在. A 为其极限值(或极限), 表示为

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A. \tag{37}$$

连续 设函数在 z_0 的邻域内有定义. 如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0), \tag{38}$$

即 $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon) > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点**连续**.

Note 函数在区域 G 内的每一点都连续, 称为在 G 内连续.
函数在闭区域 $\overline{G}$ 上的每一点都连续, 称为在 $\overline{G}$ 内连续.

Theorem 1.7 *连续函数的和、差、积、商 (分母不为零), 以及复合函数仍是连续函数.*

1.6 无穷远点

无穷远点

为了方便, 常引入无穷远点 (或无穷大) ∞, 满足 ($\forall z \in \mathbb{C}$)

$$z + \infty = \infty, \tag{39a}$$

$$z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0), \tag{39b}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty. \tag{39c}$$

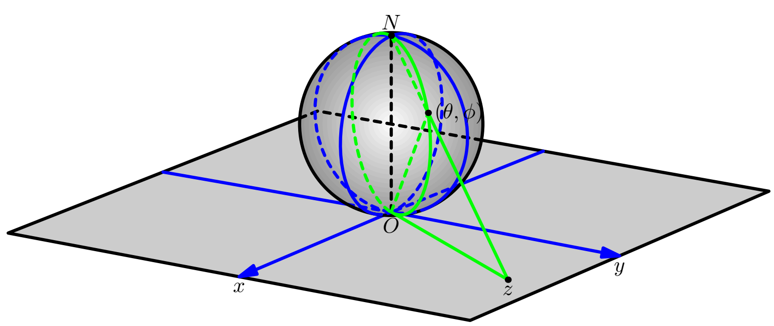
Note 与实数域不同 (它有两个无穷大 $+\infty$ 和 $-\infty$), 复数域只有一个无穷远点. 原因是复数域不是一个有序域.

扩充的复数域* 和 *扩充的复平面

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \infty.$$

Riemann 球表示

可以用 **Riemann 球表示**来理解扩充的复平面.



无穷远点的邻域 定义为 $|z| > M$ $(M > 0)$.

无穷远点的极限 设函数在 ∞ 的邻域内有定义. 如果存在复数 A, $\forall\epsilon > 0$, $\exists M(\epsilon) > 0$, 使当 $|z| > M$ 时, 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 $z \to \infty$ 时, $f(z)$ 的**极限**存在. A 为其极限值(或极限), 表示为

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A. \tag{40}$$

无穷远点的函数值 *设函数在 ∞ 的极限存在. 定义*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty), \tag{41}$$

*并称 $f(z)$ 在 ∞ 点***连续***.*

无穷远点只不过是一个极限过程. 若令 $z = \dfrac{1}{w}$, 则无穷远点的邻域 $|z| > M$ 便是 $|w| < \dfrac{1}{M}$, 为 $w = 0$ 点的邻域. 所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} f(\frac{1}{w}). \tag{42}$$

1.7 有界区域

有界 *若存在正实数 $M > 0$, 所有点集 E 的点 z 都满足 $|z| < M$, 则称点集 E* **有界***.*

Theorem 1.8 (连续函数有界性) *在有界闭区域 $\overline{G}$ 上连续的函数 $f(z)$, $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界, 并达到它的上下界.*

在引入扩充的复平面后, 扩充复平面上的闭区域 $\overline{G}$ 都是 Riemann 球上的有界闭区域, 连续函数的有界性定理可表为

Theorem 1.9 (推广的连续函数有界性) *在扩充的复平面内, 闭区域 $\overline{G}$ 上连续的函数 $f(z)$, $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界, 并达到它的上下界.*

这是因为在扩充的复平面, 我们可以将闭区域 $\overline{G}$ 拆为两部分: $|z| \le M$ 和 $|z| \ge M$. 第一部分为有界闭区域, 而第二部分在变换 $z = \dfrac{1}{w}$ 后, 也是 w 平面的一个有界闭区域.